Vejledning for faget matematik

På denne side kan du læse vejledningen for faget matematik. Vejledningen indeholder blandt andet en beskrivelse af undervisningens tilrettelæggelse og indhold og en uddybning af fagets kompetenceområder.

Fold alle afsnit ind

1. Matematiks identitet og rolle

.

1.1 Elevers udvikling af matematisk kompetence

De matematiske kompetencer, eleverne skal udvikle igennem folkeskolens matematikundervisning, skal både bidrage til deres personlige liv og til deltagelse i samfundslivet. På den måde skal folkeskolens matematikundervisning både virke alment dannende og som forberedelse til videre uddannelse og arbejdsliv, og undervisningen skal derfor behandle matematikholdige situationer fra såvel fritids- og samfundsliv som uddannelses- og arbejdsliv.

I forhold til fritids- og samfundsliv behandles i de yngste klasser situationer fra den helt nære omverden som fx familien, klassen, skolen og fritidsaktiviteter, således at eleverne opnår indsigt i matematikkens rolle og muligheder som beskrivelsesmiddel og analyseværktøj i forskellige situationer. Det kan være forskellige tegnemetoder til beskrivelse af omverdenen, brøker, som de møder i forskellige sammenhænge, eller diagrammer, som beskriver forskellige familiemønstre i klassen. I forhold til sigtet mod videre uddannelse behandles også rene matematikproblemstillinger, som kan danne basis for en dybere forståelse af matematik som videnskabsfag. I de yngste klasser kan det fx være navngivning og definition af geometriske figurer med en passende præcision eller simpel argumentation ud fra spørgsmål som: På hvor mange måder kan fem aber sidde i to træer?. Spørgsmålet er ikke umiddelbart ren matematik, men konteksten er her valgt for at give eleverne et billede af problemstillingen, og ikke fordi det i praksis er relevant. Det centrale er således elevernes ræsonnementer i forhold til 5-summer og ikke de konkrete aber.

I løbet af skoleforløbet udvides den omverden, eleverne beskæftiger sig med, samtidig med at de i højere grad kan inddrage personlige overvejelser og stillingtagen i forhold til de problemstillinger og emner, der behandles. På mellemtrinnet kan det fx være æstetiske overvejelser i forbindelse med brug af symmetrier i logoer eller overvejelser i forbindelse med brug af forskellige diagrammer og deskriptorer til præsentation af resultaterne af en statistisk undersøgelse. I udskolingen kan det fx være brug af matematiske modeller til fordeling af midler som børnepenge og boligtilskud eller sammenligning af indkomstforhold i forskellige lande samt prognoser på baggrund af forskellige scenarier. Samtidig ændres de rene matematiske situationer til at indeholde et stadig større abstraktionsniveau, således at eleverne opnår indsigt i den måde, matematikken er bygget op på med aksiomer, definitioner, matematiske sætninger og logisk argumentation. Eleverne undersøger matematiske sammenhænge og begreber og opstiller og afprøver på den baggrund hypoteser, som de kan udvikle til matematiske sætninger med så høj en grad af præcision, som det er muligt i den konkrete situation. I enkelte tilfælde kan sammenhænge bevises formelt i traditionel matematisk forstand, i andre tilfælde kan eleverne argumentere for en påstand, fx med et antal forskellige eksempler eller ved at simulere med et digitalt hjælpemiddel og på den måde overbevise sig selv og andre om påstandens gyldighed. I geometri er der en række eksempler på simple sammenhænge, som relativt let kan bevises, fx at topvinkler har samme størrelse og at vinkelsummen i en trekant er 180˚. Forud for en formel bevisførelse er det imidlertid afgørende, at eleverne selv har undersøgt sammenhængen og formuleret hypoteser, sådan at bevisførelsen behandler en geometrisk sammenhæng, de har gjort sig erfaringer med. Det er på ingen måde meningen, endsige hensigtsmæssigt, at inddrage mere komplicerede matematiske beviser i undervisningen. I stedet er det vigtigt at fokusere på bevisets stilling som et afgørende element i matematik samt på opbygningen af et matematisk ræsonnement med præmis, argument(er) og konklusion.

Målene for undervisningen er opdelt i to dele. Første del indeholder målbeskrivelser i seks matematiske kompetencer og anden del i tre stofområder.

I fagformålet for matematik fremgår det af stk. 1, at eleverne i faget matematik skal:

"udvikle matematiske kompetencer og opnå færdigheder og viden, således at de kan begå sig hensigtsmæssigt i matematikrelaterede situationer i deres aktuelle og fremtidige daglig-, fritids-, uddannelses-, arbejds- og samfundsliv."

De matematiske kompetencer og færdigheder og viden fra de tre matematiske stofområder skal ikke ses som isolerede fra hinanden, men skal tværtimod indgå i et samspil i lærerens tilrettelæggelse af undervisningen, således som det fremgår af figur 1. Læreren udvælger mål både fra et stofområde og fra en eller to matematiske kompetencer og formulerer på baggrund heraf læringsmål for et undervisningsforløb eller en undervisningslektion.

	Problembehandling	Modellering	Ræsonnement og tankegang	Repræsentation og symbolbehandling	Kommunikation	Hjælpemidler
Tal og algebra						
Geometri og måling						
Statistik og sandsynlighed						

Figur 1: Model for planlægning af undervisningsforløb i matematik

At udvikle matematiske kompetencer betyder at kunne udmønte matematisk viden og færdigheder i hensigtsmæssige handlinger i den mangfoldighed af situationer, som indeholder matematik. På mellemtrinnet og i udskolingen skal eleverne desuden i stigende grad kunne inddrage egen personlig stillingtagen i udmøntningen af handlinger. For eksempel kan repræsentation og symbolbehandlingskompetence komme til udtryk ved valg og brug af hensigtsmæssig repræsentationsform til præsentation af en given sammenhæng ud fra elevernes vurdering af, hvilke forhold der skal fremhæves, og hvilke der ikke er vigtige i en given situation.

Hvert færdigheds- og vidensmål kan danne ramme om flere forskellige undervisningsforløb i en klasse. De enkelte undervisningsforløb eller lektioner kan fokuseres ved at kombinere med udvalgte kompetencemål. Et undervisningsforløb i 3. klasse om enkle decimaltal og brøker kan således vinkles forskelligt, afhængigt af om der fx fokuseres på repræsentation og symbolbehandlingskompetencen i kombination med hjælpemiddelkompetencen eller ræsonnement og tankegangskompetencen.

I praksis er det svært – og næppe hensigtsmæssigt – udelukkende at arbejde med en eller to af de matematiske kompetencer i et undervisningsforløb. De fleste kompetencer vil oftest kunne identificeres i større eller mindre omfang i et undervisningsforløb. Pointen er imidlertid fokuseringen på en eller to kompetencemål som de væsentligste for undervisningen. Kombinationen af mål fra et stofområde og fra matematiske kompetencer kan være et redskab til at hjælpe både lærere og elever til i højere grad at være opmærksomme og holde fokus på det væsentlige i undervisningen. I enkelte tilfælde kan det være hensigtsmæssigt at tage udgangspunkt i mål fra en matematisk kompetence og kombinere med mål fra forskellige stofområder. Det kan fx ske i et arbejde med enkle matematiske modeller på mellemtrinnet, hvor eleverne arbejder med matematiske modeller inden for forskellige stofområder.

1.2 Matematiske arbejdsmåder

Faget matematik har en række karakteristiske arbejdsmåder, som elevernes læring skal baseres på. Elevernes læring skal baseres på, at de selvstændigt og gennem dialog og samarbejde med andre kan erfare, at matematik fordrer og fremmer kreativ virksomhed, og at matematik rummer redskaber til problemløsning, argumentation og kommunikation.

At matematik fordrer og fremmer kreativt arbejde betyder, at matematik blandt andet er en eksperimenterende og undersøgende proces, hvor eleverne udvikler deres egne matematiske resultater. Det stiller store krav til de aktiviteter, som foregår i undervisningen, da disse skal tilrettelægges, så eleverne kan opnå erfaringer med og indsigt i væsentlige matematiske sammenhænge. I den proces er det helt afgørende, at eleverne indgår i dialog og samarbejde med hinanden, således at de får lejlighed til at diskutere og afprøve forskellige muligheder, overveje alternativer, formulere og afprøve hypoteser, argumentere for løsninger og fremlægge resultater. Ofte kan simple spørgsmål danne udgangspunkt for undersøgelser. Fx:

- Indskolingen: Hvor mange forskellige firkanter kan du lave på sømbrættet?
- Mellemtrinnet: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Find flere eksempler på brøker, hvis sum er 1. Hvor mange kan I finde? Brug evt. egne tegninger på kvadratnet.
- Udskolingen: I skal undersøge, om sammenhængen mellem længde og bredde på æg er lineær. Brug et passende digitalt værktøj.

Eleverne skal helt fra de yngste klasser lære at undersøge, stille spørgsmål, opstille hypoteser etc., således at de igennem skoleforløbet tilegner sig redskaber og færdigheder i at arbejde undersøgende og eksperimenterende. I nogle tilfælde er det hensigtsmæssigt at kunne foretage en systematisk undersøgelse, fx ved at udvælge væsentlige parametre og ændre en ad gangen eller anvende forskellige repræsentationsformer, mens de i andre tilfælde må prøve sig frem, eksemplificere og måske herudfra arbejde sig frem imod en god ide. I denne proces er dialog og samarbejde helt afgørende, herunder udvikling af matematisk sprog og kommunikation såvel internt gennem dialogen i gruppen som eksternt, når resultater skal formidles til andre. Heri ligger samtidig udvikling af matematisk argumentation ud fra eksempler og resultater af undersøgelser.

1.3 Matematiks rolle

Eleverne skal igennem undervisningen opleve og erkende matematikkens rolle i en historisk, kulturel og samfundsmæssig sammenhæng, og eleverne skal kunne forholde sig vurderende til matematikkens anvendelse med henblik på at tage ansvar og øve indflydelse i et demokratisk fællesskab.

Historisk har matematikkens rolle ændret sig fra at være et videnskabsfag, som kun få blev indviet i, og som ikke beskæftigede sig med virkeligheden, til i højere og højere grad også at være et redskab for en række andre fag. Derved er matematik blevet et vigtigt fag for alle, både uddannelsesmæssigt til brug i andre fag, og dannelsesmæssigt i forhold til at forstå og deltage i det omgivende samfund. Matematiks rolle som redskabsfag i andre fag giver samtidig en række oplagte muligheder for, at matematik kan samarbejde med andre fag i skolen, men hvis eleverne skal opnå matematisk kompetence, viden og færdigheder gennem tværfagligt arbejde, er det væsentligt, at matematik ikke kun deltager som redskabsfag. Matematik kan – og bør i nogle tilfælde – indgå som bærende fag i tværfaglige forløb. Det kan fx være et forløb i indskolingen om mønstre og design i samarbejde med billedkunst eller miljø i nærområdet på mellemtrinnet i samarbejde med natur/teknologi eller fordelingspolitik med matematiske modeller i samarbejde med samfundsfag i udskolingen.

Matematik spiller en stadig større rolle i elevernes hverdag og det omgivende samfund. Det gælder både i forhold til hele den teknologiske udvikling, som i høj grad er betinget af udviklingen af matematisk viden, men også politiske og økonomiske beslutninger, som i stigende grad bygger på matematiske modeller. Elevernes tilegnelse af matematisk modelleringskompetence er derfor helt centralt i forhold til at forstå, anvende og forholde sig til matematikkens anvendelse i et demokratisk fællesskab. Det er imidlertid karakteristisk for de matematiske modeller i såvel teknologiske som politisk/økonomiske sammenhænge, at den anvendte matematik for det første ofte er skjult, så vi ikke umiddelbart lægger mærke til den eller har behov for at forholde os til den, og for det andet at den er meget kompliceret og kun tilgængelig for specialister. Det er således yderst kompliceret at arbejde med fx den matematiske model, der ligger til grund for skattebetaling i Danmark, men eleverne kan gennem arbejde med små matematiske modeller opnå erfaringer med, hvordan forskellige betragtninger om fx retfærdighed kan indlejres i en model igennem begreber som bruttoskat (Arbejdsmarkedsbidrag), fradrag og indkomstskat. Dermed kan de opnå erfaringer med at opbygge modeller ud fra i dette tilfælde retfærdighedskriterier og de dilemmaer og begrænsninger, det indebærer, og lære at forholde sig kritisk og vurderende til egne og andres modeller.

Et andet eksempel er politiske beslutninger, som bygger på specialisters modeller, beregninger og prognoser, som fx i mange miljøpolitiske problemstillinger om global opvarmning, uddøende dyrearter og menneskets påvirkning af naturen i det hele taget. Denne type modeller og beregninger er ofte helt utilgængelige for ikke-specialister, men set i et demokratisk perspektiv er det vigtigt, at eleverne lærer, hvad det er for mekanismer og forudsætninger, der ligger bag sådanne modeller, så de kan forholde sig kritisk til deres anvendelse.

Som det fremgår af læringsmålene i Fælles Mål, skal der ikke kun arbejdes med elevernes tilegnelse af modelleringskompetence i de ældste klasser, hvor eleverne kan arbejde med matematikske modeller, som ligner modeller, der ligger bag demokratiske beslutninger. Eleverne skal allerede i indskolingen stifte bekendtskab med meget simple modeller, fx geometriske modeller som korttegning og isometrisk tegning eller modeller for overskud ved salg af kager til en skolefest. Det er afgørende, at eleverne allerede på dette tidspunkt opnår erfaringer med forskellige typer af matematiske modellers styrker og svagheder, så de kan forholde sig kritisk og vurderende til disse.

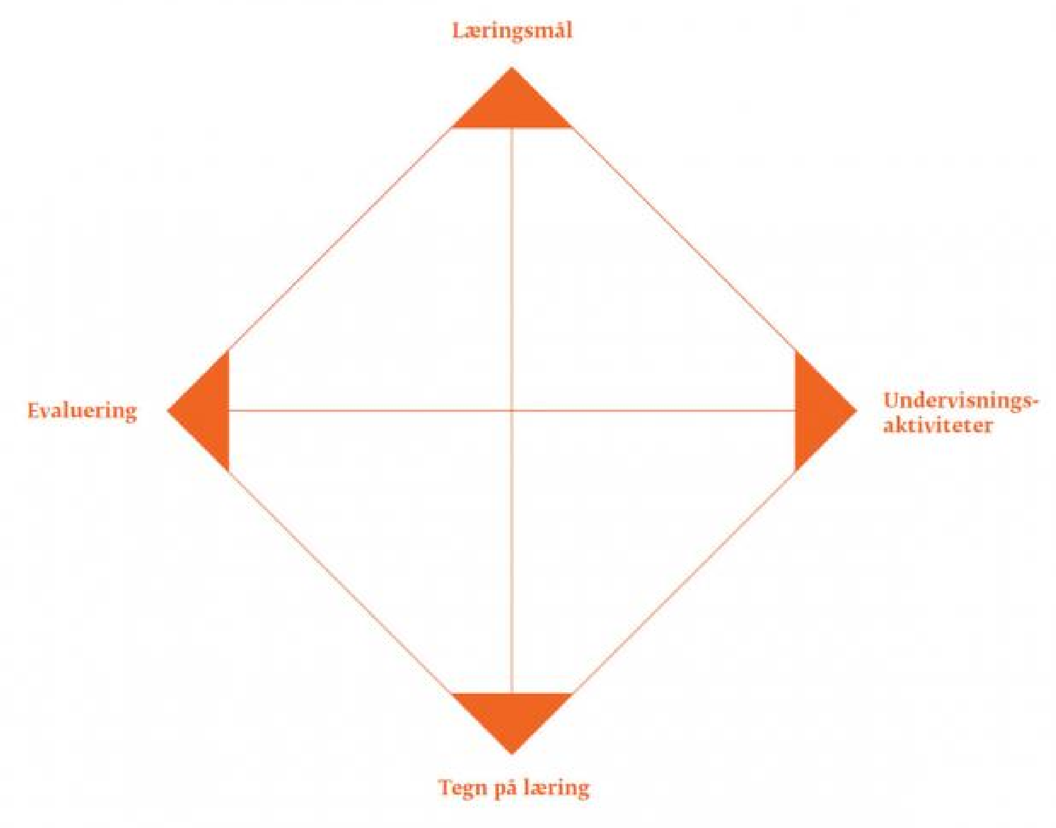
2. Læringsmålstyret undervisning

Den læringsmålstyrede undervisning tager udgangspunkt i et systematisk arbejde med læringsmål. Læringsmålene er mål for det, eleverne skal lære, og er styrende for lærerens valg af undervisningens indhold, forløb og aktiviteter. Fælles Mål skal understøtte lærerens arbejde med læringsmål.

2.1 Den didaktiske model: Fire indbyrdes afhængige faktorer

I læringsmålstyret undervisning hænger valg af læringsmål, valg af undervisningsaktiviteter, tegn på læring og evaluering tæt sammen i alle faser af undervisningen.

Når et forløb har afsæt i nogle bestemte læringsmål, vælges undervisningsaktiviteter, der fremmer netop disse læringsmål. Samtidig overvejer læreren tegn, der kan vise, hvor langt eleverne er i forhold til at opfylde læringsmålene. Valg af undervisningsaktiviteter hænger også sammen med, hvad evalueringen fra sidste forløb viste, og således med, hvilke læringsmål og undervisningsaktiviteter der vil skabe passende læringsudfordringer for alle klassens elever. I læringsmålstyret undervisning sigtes altså hele tiden mod et mål for elevernes læring.



Model 1: Relationsmodellen

Relationen mellem de fire indbyrdes afhængige dimensioner kan illustreres ved ovenstående model. Nedenfor gennemgås de fire dimensioner af relationsmodellen.

Det er lærerens opgave at nedbryde – eller omsætte – Fælles Mål til konkrete mål for, hvad eleverne skal kunne ved afslutningen af et undervisningsforløb. Det er mål, der angiver skridt på vejen til at nå det fælles læringsmål, og mål, der kan forklares og gøres tydelige for eleverne. Med det udgangspunkt kan læreren skabe passende læringsudfordringer for alle elever.

Model 2: Nedbrydning af Fælles Mål til læringsmål for det enkelte undervisningsforløb

De indholdsvalg, valg af aktiviteter, opgaver og processer, som læreren foretager, skal være begrundet i, hvordan de understøtter alle elevers læring. Undervisningsaktiviteterne skal også planlægges med sigte på at give læreren viden om elevernes læringsudbytte, så læreren kan give eleverne feedback.

Læreren skal også afgøre, hvordan lærere og elever kan se tegn på, at målene er nået. Tegn er kriterier for målopfyldelsen og kan bestå af det, som eleverne kan kommunikere, færdigheder, de kan demonstrere i praksis, eller produkter, de kan skabe. Lærerens tolkning af tegnene hjælper læreren med at vurdere elevernes læringsudbytte og danner grundlag for lærerens feedback til eleverne om deres læringsresultater.

Læreren skal løbende evaluere, hvor eleverne er i forhold til læringsmålene, og hvordan de kan støttes og udfordres i at komme videre i retning af målene. En formativ evaluering gør det muligt for læreren at give eleverne feedback på deres læringsudbytte undervejs i forløbet. Den formative vurdering af elevernes læringsudbytte undervejs følges op af en summativ vurdering af samtlige elevers læringsudbytte, som danner afsæt for planlægningen af det næste forløb.

Læringsmålstyret undervisning foregår gennem tre faser: planlægning, gennemførelse og evaluering. I hver af de tre faser har læreren øje for sammenhængen mellem læringsmål, valg af undervisningsaktiviteter, tegn på læring og evaluering, så alle elever får passende læringsudfordringer.

Læs mere om læringsmålstyret undervisning i Undervisningsministeriets **vejledning om læringsmålstyret undervisning** under Relaterede moduler.

2.2 Læringsmålstyret undervisning i matematik

I nedenstående afsnit gennemgås de centrale overvejelser om læringsmålstyret undervisning i faget matematik ud fra et eksempel på et undervisningsforløb.

Planlægning

I planlægningen af et undervisningsforløb udvælger læreren bl.a. de læringsmål fra Fælles Mål, som eleverne skal arbejde mod at opnå. Udvælgelsen skal i matematik både omfatte læringsmål fra kompetenceområdet matematiske kompetencer og fra et eller (sjældent) flere af stofområderne tal og algebra, geometri og måling samt statistik og sandsynlighed. Et undervisningsforløb kan fx på samme tid sigte mod elevernes opnåelse af udvalgte læringsmål inden for modellering og statistik.

Set over et helt skoleår er det vigtigt, at undervisningsforløbene kombinerer forskellige matematiske kompetencer med forskellige stofområder, men det er ikke nødvendigvis sådan, at hver af de seks matematiske kompetencer inden for et år skal kombineres med hvert af de tre stofområder. Det er vigtigt, både for læreren og eleverne, at det er et overskueligt antal læringsmål, der sættes i fokus. Planlægningen af undervisningsforløb i matematik tager således ofte udgangspunkt i et til tre læringsmål fra de matematiske kompetencer og et til tre læringsmål fra stofområderne.

Læringsmålene i Fælles Mål er mål for elevernes læring over længere perioder, fx over et helt skoleår. I planlægningen af et konkret forløb af fx tre ugers varighed må disse mål omsættes eller nedbrydes i mindre læringsmål, der kan fungere som en klasses trædesten frem mod de fælles læringsmål. Det er bl.a. matematiklærerens opgave, evt. i samarbejde med kolleger, at foretage denne nedbrydning, der ofte samtidig giver anledning til fagdidaktiske diskussioner og til udvikling og udveksling af ideer til undervisningsaktiviteter.

De nedbrudte læringsmål skal bruges til at gøre det klart for eleverne, hvad de skal lære, og hvad der forventes af dem. Samtidig skal de gøre det muligt for læreren at spore elevernes fremgang. Nedbrudte læringsmål må derfor formidles af læreren til eleverne, så det kan blive synligt for både elever og lærer, i hvilken grad målene bliver opfyldt af de enkelte elever. I nedbrydningen af læringsmålene er det færdighedsmålene, der er omdrejningspunktet, mens de tilhørende vidensmål bredt beskriver, hvilken viden der kan bidrage til at fremme elevernes opfyldelse af den omtalte færdighed.

Nedbrudte læringsmål rummer det potentiale, at elevernes læring kan blive synlig for både elever og lærer. Optimalt set får eleverne mulighed for at se mening med og føle ejerskab for læringsmålene, når læreren inddrager dem i målene, begrunder dem og gør det tydeligt, hvad der skal til for at opnå dem. Lærerens arbejde med at nedbryde læringsmål rummer samtidig den risiko, at væsentlige aspekter af det faglige indhold kan gå tabt i processen, og at de nedbrudte læringsmål kan blive for snævre, så det bliver vanskeligt at differentiere undervisningen mod målene. Det er fx ikke hensigtsmæssigt at nedbryde læringsmålet: ”Eleven kan anvende naturlige tal til at beskrive antal og rækkefølge” på en måde, så alle elever først skal arbejde med tallene fra 1 til 10, derefter med tallene fra 10 til 20 osv. Målet kan nedbrydes, så eleverne stadig får mulighed for at arbejde med forskellige talområder og på forskellige niveauer på samme tid. Eksempler:

- ”Eleverne kan tælle ting”.
- ”Eleverne kan sætte tal i rækkefølge efter størrelse”.

Det er realistisk, at alle elever i en 1. klasse vil kunne opnå mål som disse, men nogle kan klare større tælleopgaver end andre, og nogle kan anvende mere nuancerede tællemåder end andre, fx ved at inddele de objekter, der skal tælles i grupper a 5 og bruge tælleremsen 5, 10, 15, … Det betyder, at hvert af de nedbrudte læringsmål kan opfyldes på forskellige niveauer.

Et nedbrudt læringsmål i matematik kan meget vel rumme aspekter fra både de matematiske kompetencer og de matematiske stofområder. Fx kan følgende læringsmål fra hhv. Kompetenceområdet ræsonnement og tankegang og geometriske egenskaber sammen nedbrydes til læringsmål, der omfatter aspekter af både ræsonnement og geometri:

Fælles læringsmål:

- ”Eleven kan undersøge geometriske egenskaber ved plane figurer”.
- ”Eleven kan anvende ræsonnementer i undersøgende arbejde”.

Eksempler på nedbrudte læringsmål:

- ”Eleven kan formulere ræsonnementer i forbindelse med undersøgelse af antallet af diagonaler i polygoner”.
- ”Eleven kan give eksempler på påstande af formen ’Hvis … så …’ i forbindelse med undersøgelse af sammenhænge mellem omkreds og areal i rektangler”.

Matematiklærerens valg og nedbrydning af læringsmål bygger ikke alene på Fælles Mål, men også på hans eller hendes kendskab til eleverne i klassen. Hvad kan de hver især i forvejen, og hvad kan betragtes som allerede etableret fælles viden og kunnen i klassen? Hvad motiverer dem, og hvilke faglige potentialer har de – eller med andre ord: Hvad er de enkelte elevers og klassens faglige profil og status? På den måde udvælger og nedbryder matematiklæreren læringsmålene, bl.a. på baggrund af den viden, han eller hun har fra tidligere evalueringer i klassen. Læreren må altså spørge sig selv, hvad eleverne kan i forvejen, og hvad de skal kunne, når det kommende undervisningsforløb er færdigt. I forbindelse med planlægningen af nogle undervisningsforløb kan læreren have behov for at skaffe sig indsigt i elevernes kunnen og viden om det faglige indhold, som skal være i fokus. I sådanne tilfælde kan det være meningsfuldt at indlede forløbet med en evalueringsaktivitet, der kan give læreren nogle af de informationer, han eller hun har brug for til sin planlægning.

Det er oplagt, at planlægningen af et undervisningsforløb i matematik også er forbundet med valg af, hvilke aktiviteter der skal indgå i undervisningen. I den forbindelse er det vigtigt, at de aktiviteter, læreren udvikler eller vælger, er begrundet i forløbets læringsmål. I sådanne situationer er spørgsmålet, hvad aktiviteten kan give eleverne mulighed for at lære, og om disse muligheder harmonerer med Fælles Mål samt klassen faglige profil og status. Det afgørende er, at elevernes arbejde med aktiviteten bliver rettet mod læringsmål, så aktiviteten bliver et middel og ikke et mål i sig selv.

Undervejs i et undervisningsforløb må læreren løbende evaluere elevernes læring i forhold til de nedbrudte læringsmål. Den løbende evaluering skal læreren både bruge til at give eleverne feedback på deres arbejde mod målene og til at justere sin undervisning undervejs i forløbet. Det drejer sig altså om evaluering, der har til formål at forbedre elevernes læring. Den løbende evaluering kan og

bør have mange forskellige former, men alle disse former må tage højde for, at elevernes læring kommer til udtryk gennem deres handlinger i de aktiviteter, der foregår i klassen, fx i form af dialoger og arbejde med produkter. Det kan derfor være en fordel, hvis læreren allerede i planlægningsfasen gør sig overvejelser om, hvilke aktiviteter der vil give eleverne mulighed for at vise tegn på læring, og hvilke tegn der er udtryk for forskellige grader af målopfyldelse.

Eksempel:

Læringsmål: ”Eleven kan løse problemer, hvor der skal bruges flere regningsarter”.

Aktivitet: Herunder er en oversigt over sæderne i en biograf. De farvede kvadrater viser sæder, der er optaget. Skriv med så mange forskellige regneudtryk du kan, hvordan du kan beregne, hvor mange sæder der er optaget.

Tegn på stigende grader af målopfyldelse:

Eleven beskriver antallet af optagede sæder med mindst ét regneudtryk

(fx 12+12+12+12+8+8+2).

Eleven beskriver antallet af optagede sæder med sammensatte regneudtryk

(fx 4 · 12 + 2 · 8 + 2)

Eleven beskriver antallet af optagede sæder med sammensatte regneudtryk og alle fire regningsarter

(fx 8 · 12: 2 + 3 · 8 - 6)

De opstillede tegn på stigende grader af målopfyldelse kan undervejs fungere som en slags ror i undervisningen. Er de enkelte elever og klassen samlet set på vej til at kunne det forventede i forbindelse med de undervisningsaktiviteter, der er planlagt - eller er der grund til at justere kursen? En justering i kursen kan fx ske i form af ændrede undervisningsaktiviteter, men det kan også tænkes, at der er grund til at justere selve læringsmålene undervejs. Samtidig kan de opstillede tegn på stigende grader af målopfyldelse fungere som en støtte til den løbende feedback, læreren giver eleverne undervejs i forløbet, idet tegnene beskriver, hvad der skal til for at vise en større grad af målopfyldelse.

Sammenfattende kan man sige, at ud over udvælgelsen og nedbrydningen af læringsmålene fra Fælles Mål handler planlægningsfasen i læringsmålstyret undervisning især om at skabe sammenhæng mellem læringsmål, undervisningsaktiviteter, tegn på læring og den løbende evaluering. Til hvert af læringsmålene fra Fælles Mål i matematik er der på EMU-portalen formuleret eksempler på nedbrudte læringsmål og evalueringsaktiviteter med tilknyttede tegn på stigende grader af målopfyldelse. Desuden er der formuleret eksempler på udfordringsopgaver, som er rettet mod de fagligt stærkeste elever. Hensigten er, at matematiklærere kan bruge eksemplerne som inspiration i arbejdet.

Gennemførelse

I læringsmålstyret matematikundervisning er det centralt, at de valg, læreren foretager undervejs i gennemførelsen af undervisningen, er styret af de læringsmål, han eller hun har opstillet, samtidig med at han eller hun har en vis opmærksomhed rettet mod de uforudsete læringsmuligheder, der kan vise sig i interaktionen med eleverne.

I enhver matematiktime foretager matematiklæreren mange valg på ganske kort tid. Hvilke spørgsmål skal jeg stille mine elever i den fælles dialog? Hvornår skal jeg foreslå eleverne anderledes tilgange til de problemer, de arbejder med, og hvornår skal jeg lade dem udforske på egen hånd? Hvordan kan jeg bedst støtte og udfordre de enkelte elever i deres arbejde? Læringsmålene bør i forbindelse med lærerens beslutninger udgøre de centrale pejlemærker. Hvis det er et mål, at eleverne skal udvikle ræsonnement og tankegangskompetence, må læreren fx sigte i den retning, når han eller hun stiller spørgsmål, støtter og udfordrer. Hvilke spørgsmål kan give eleverne mulighed for at udvikle, formulere, diskutere og vurdere ræsonnementer i forbindelse med den undervisningsaktivitet, der er i gang? Noget tilsvarende gælder naturligvis for alle andre læringsmål. Hvis målet med undervisningen er, at eleverne udvikler problembehandlingskompetence, kan det fx hjælpe læreren til at beslutte, hvornår og hvordan han griber ind i elevernes problemløsningsproces. I forbindelse med problemløsning er det netop en pointe, at eleverne oplever den situation, hvor de ikke lige ved, hvordan de kan komme videre – de skal bl.a. udvikle og lære strategier, der kan hjælpe dem med at løse knuden.

Matematikundervisning kan have mange forskellige former, men ofte har undervisningen nogle faser med fællestræk, der fx kan karakteriseres som iscenesættelse, aktiviteter og fællesgørelse. Disse faser spiller forskellige roller i forhold til elevernes arbejde mod læringsmålene:

Iscenesættelserne har til formål at motivere og igangsætte elevernes aktiviteter. En vigtig del af denne motivering og igangsættelse er, at eleverne bliver involveret i undervisningens læringsmål og får målet forbundet med den aktivitet, de skal i gang med. Hvad skal de lære, og hvad forventes der af deres arbejde? Igennem iscenesættelserne skal eleverne både indleve sig i den kommende aktivitet, dens formål og sammenhængen mellem aktivitet og formål. Iscenesættelserne skal således gøre undervisningen meningsfuld for eleverne og give dem mulighed for at arbejde målrettet.

I aktiviteterne er elevernes arbejde i fokus. Det kan fx være, at eleverne gruppevist arbejder med at få hul på problemstillinger, diskutere mulige løsningsstrategier, udvikle og afprøve hypoteser om løsninger samt argumentere for og vurdere hinandens udsagn. Andre aktiviteter kan have præg af projektarbejde, værkstedarbejde eller bestå af øvelser, hvor eleverne anvender metoder og resultater, de allerede har lært. Undervejs støtter og udfordrer læreren grupperne og de enkelte elever i arbejdet mod læringsmålene. I den forbindelse fungerer læringsmålene som pejlemærker for den støtte og de udfordringer, læreren giver.

Fællesgørelse handler om at dele de indsigter og formodninger, eleverne har udviklet igennem aktiviteterne, og sætte dem i relation til etableret matematikviden og det, eleverne allerede har lært. I undervisningens fællesgørelse kan eleverne fx fortælle hele klassen om deres arbejde og om de faglige resultater, de er nået frem til i aktiviteterne. De kan forklare klassen, hvad de har gjort, hvordan de har tænkt, og de kan diskutere de ideer og resultater, der kommer på banen. Læreren kommenterer løbende disse fortællinger og forklaringer for at guide eleverne i retning af holdbare matematiske resultater, arbejdsmåder, forklaringer, formuleringer m.m., der er forbundet med læringsmålene for deres arbejde. Det er også lærerens opgave at opsummere de pointer, som er fremkommet i elevernes arbejde og sætte dem i forhold til læringsmålene og det, eleverne tidligere har lært.

I gennemførelsen af læringsmålstyret matematikundervisning spiller princippet om undervisningsdifferentiering en afgørende rolle. Iscenesættelserne må så vidt mulig give alle de forskellige elever mulighed for at se mening i at arbejde med de planlagte aktiviteter og læringsmål. Ud over selve indholdet i undervisningen stiller det krav til selve læringsmålene og til lærerens formidling af dem. Læringsmålene må så vidt muligt have en karakter, så alle eleverne har mulighed for at opfylde dem på forskellige niveauer, og de må formidles på en måde, så alle eleverne får skabt et billede af, hvad de skal arbejde mod. Det vil sjældent være hensigtsmæssigt at bruge typiske målformuleringer over for eleverne, men ofte hensigtsmæssigt at forbinde læringsmålene med de konkrete aktiviteter, eleverne skal arbejde med.

I en 5. klasse formidlede en lærer fx læringsmålet: "Eleverne kan ordne og beskrive rå (diskrete) data"

ved at fortælle om en diskussion, han havde haft med nogle venner. Hvor mange penge bør børn få i lommepenge? Nogle mente, at nutidens børn får alt for meget, og at de slet ikke burde få lommepenge, andre mente noget andet. Læreren vidste slet ikke, hvad han skulle mene, for han vidste ikke rigtig, hvor mange penge børn får i lommepenge. Hvor mange penge får en elev i 5. klasse i lommepenge? "Jeg fortalte mine venner, at min 5. klasse i den kommende periode skal arbejde med at gennemføre undersøgelser, hvor man kan få svar på lige præcis den slags spørgsmål, og at jeg derfor ville bede dem begynde med at undersøge, hvor mange lommepenge eleverne i 5.B får. Vi skal altså indsamle lommepengeoplysninger fra hver af jer, og så skal vi bagefter finde en god måde at fortælle om vores undersøgelse til mine venner. Vi får alle om lidt en masse tal på tavlen. Det, I skal lære, er, hvordan vi kan komme fra alle de mange tal til at kunne fortælle nogen, hvad tallene siger." Med den sidste sætning søger læreren at formidle det nedbrudte læringsmål til eleverne og forbinde det med den centrale problemstilling: Hvor mange penge får en elev i 5. klasse i lommepenge?

Undervisningsaktiviteter skal tilsvarende give alle elever mulighed for at arbejde på forskellige måder og på forskellige niveauer frem mod målene, og endelig skal fællesgørelserne synliggøre pointer for alle elever og give dem mulighed for at forbinde det nye med etableret matematikviden.

Evaluering

Undervejs i et undervisningsforløb må læreren løbende forholde de tegn på læring, han ser hos eleverne i undervisningen, med de læringsmål, han har opstillet for forløbet. Ser det ud til, at de enkelte elever og klassens som helhed bevæger sig i retning af det ønskede og forventede, altså i retning af læringsmålene? Hvilken feedback kan læreren give de enkelte elever, så de ved, hvad de kan gøre for at opnå målene? Er der grund til at justere undervisningen?

Læreren må med andre ord løbende evaluere elevernes læring, dels med det formål at kunne hjælpe den enkelte elev bedst muligt videre i sin læring, dels med det formål at kunne justere sin planlægning. Er der undervisningsaktiviteter, som i endnu bedre grad end de planlagte kan give eleverne mulighed for at udvikle de færdigheder, den viden og de kompetencer, der er målet? Har det vist sig hensigtsmæssigt eller nødvendigt at justere selve læringsmålene i forhold til det planlagte? I forbindelse med begge formål er der ikke så meget tale om evaluering af læring, men i højere grad om evaluering for læring.

Der findes mange forskellige evalueringsmetoder og former, som kan anvendes i matematikundervisning. Ganske ofte vil det være hensigtsmæssigt at vælge former, som kan integreres i den daglige undervisning, sådan at lærerens systematiske indsamling af information om elevernes læring foregår i forbindelse med undervisningsaktiviteter, der samtidig giver eleverne mulighed for at lære. Læreren kan fx indsamle information om elevernes læring i forbindelse med dialog om problemstillinger, i forbindelse med deres selvstændige arbejde med opgaver og projekter samt ved at analysere de produkter, eleverne laver undervejs i forløbene. I forbindelse med indsamlingen af informationerne kan det være en stor fordel for læreren at have effektive registreringsmetoder, og i forbindelse med tolkningen af informationerne kan det være en fordel for læreren på forhånd at have formuleret, hvilken tegn på læring han eller hun vil tage som udtryk for forskellige grader af målopfyldelse i forbindelse med de aktiviteter, eleverne indgår i.

I en 8. klasse arbejder en lærer fx med systematisk indsamling af information om elevernes læring ved at fremstille et skema med de tegn, han har knyttet til et udvalgt læringsmål:

Læringsmål	Tegn	Elev 1	Elev 2	Elev 3	Elev 4	…
"Eleven kan gennemføre en undersøgelse af, hvordan en trekant kan deles i to/tre lige store dele"	eleven prøver sig usystematisk frem med retvinklede og spidsvinklede trekanter, som læreren har foreslået					
	eleven konstruerer en trekant i et dynamisk geometriprogram og udnytter programmets funktioner til systematisk at afprøve linjer ved trekanter, foretage arealberegninger og manipulere med trekanten					
	eleven forklarer, hvordan han/hun har udviklet og afprøvet hypoteser om løsningen af problemstillingen, og argumenterer for en eller flere holdbare løsninger					

Undervejs i modulet er læreren i kontakt med hver elevgruppe, mens de arbejder med aktiviteter. Efterfølgende hører han eller hun flere elever fortælle om deres arbejde. Efter modulet bruger læreren ca. 10 minutter på at udfylde skemaet. Ud for nogle elever sætter han eller hun krydser ved de tegn, der bedst beskriver elevernes arbejde i forhold til målene. Ved nogle af eleverne supplerer han eller hun krydset med små noter om det, de har sagt eller gjort i timen. Ved nogle få elever føler læreren sig for usikker til at sætte et kryds. Han eller hun bruger skemaet til at overveje, om aktiviteter eller læringsmål bør justeres til resten af forløbet, og til at overveje, hvordan eleverne kan støttes og udfordres i den kommende undervisning – og hvilke elever man skal være særligt opmærksom på.

Eksempel på læringsmålstyret undervisningsforløb i matematik

I det følgende er gengivet brudstykker fra en undervisningsplan, som den fx kan se ud for et matematikforløb i en 5. klasse, der skal arbejde med statistik og modellering.

Planlægning

Fælles læringsmål:

"Eleven kan gennemføre enkle modelleringsprocesser" (fra modellering, 4.-6. kl.).
"Eleven kan anvende og tolke grafiske fremstillinger af data" (fra statistik, 4.-6. kl.).
"Eleven kan gennemføre og præsentere egne statistiske undersøgelser" (fra statistik, 4.-6. kl.).

Eksempler på nedbrudte læringsmål i forløbet:

- "Eleverne kan begrunde sit valg i en modelleringsproces med fire faser: opstille problemet, indsamle data, beskrive data, tolke resultatet".
- "Eleverne kan ordne og beskrive rå (diskrete) data".
- "Eleverne kan bruge regneark til at producere grafiske fremstillinger af data".
- "Eleven kan mundtligt sammenligne fordelinger ud fra grafiske fremstillinger af data".

- "Eleverne kan demonstrere, hvordan enheder og grafik kan have afgørende betydning for et pindediagrams udseende".

Tegn på læring

Eksempel på læringsmål: "Eleven kan ordne og beskrive rå (diskrete) data".

Aktivitet: Eleverne har fået til opgave at ordne og beskrive et datasæt, der består af lommepengebeløb (se undervisningsplanen på den følgende side).

Tegn på læring:

1. Eleven indsætter data i en hyppighedstabel og fremstiller på den baggrund et pindediagram.
2. Eleven beskriver uformelt datasættets fordeling (fx Der er flest af … Fordelingen er lidt skæv, fordi …).
3. Eleven bruger enkle deskriptorer til at beskrive datasættet (fx typetal, variationsbredde og middeltal).

Elevforudsætninger

Det forudsættes, at eleverne kan anvende de fire regningsarter i forbindelse med naturlige tal, og at de tidligere har lært at tegne og aflæse enkle diagrammer.

Valg af undervisningsaktiviteter

Forløbet er opbygget i fire faser:

- Et kort fælles modelleringsforløb initieret og guidet af læreren (skal bl.a. vise, at matematik kan bruges til belysninger af spørgsmål og problemstillinger fra omverdenen).
- Arbejde med tolkning og beskrivelse af fordelinger i tilknytning til det fælles forløb (skal bl.a. vise, at matematiske modeller kan give svar, der må tolkes i forhold til det oprindelige spørgsmål, og som bør vurderes kritisk).
- Modelleringsforløb i grupper med løbende respons (skal bl.a. give eleverne mulighed for at opbygge erfaringer med en samlet modelleringsproces i fire faser samt erfaringer med procesorienteret arbejde i og med matematik).
- Præsentationer og evalueringer (skal bl.a. give læreren mulighed for at opsummere de centrale pointer og få indblik i elevernes udbytte).

Undervisningsdifferentiering

De udfordringer, eleverne skal arbejde med, har en åben karakter, som gør det muligt at arbejde på forskellige faglige niveauer og til dels at vælge indhold efter interesser. Undervisningen er organiseret, så læreren undervejs i forløbet kan støtte og udfordre forskellige elevgrupper på forskellige måder.

Evaluering

I forbindelse med den løbende evaluering i forløbet udnyttes det, at eleverne to gange gennemgår et helt modelleringsforløb. Det første forløb, der er kortvarigt og initieret af læreren (fase 1), udnyttes bl.a. til at registrere, hvad eleverne kan og ved i forhold til udvalgte læringsmål og til at vurdere elevernes læring i forhold til de tegn, læreren har opstillet i tilknytning til læringsmålene (se eksempel på forrige side). I forløbet får tegnene mulighed for at komme til udtryk igennem dialogen i klassen og i elevernes produkter. Efter timen kan læreren fx systematisk sammenholde de tegn, han eller hun har observeret hos eleverne, med de tegn, han eller hun havde forventet at se. Informationerne kan både give grundlag for at give eleverne feedback på deres læring og til at justere læringsmål og/eller de planlagte undervisningsaktiviteter.

Gennemførelse

Et eksempel på en dobbeltlektion i fase 1

Læringsmål

- "Eleverne kan ordne og beskrive rå (diskrete) data”
- "Eleverne kan begrunde deres valg i en modelleringsproces med fire faser: opstille problemet, indsamle data, beskrive data, tolke resultatet”

Undervisningsaktiviteter

Iscenesættelse:

Læreren fortæller om et selskab, han var til i weekenden. Ved bordet kom de voksne til at diskutere, hvor mange penge børn bør få i lommepenge – og de var ikke enige. Nogle mente, at nutidens børn får alt for meget, og at de slet ikke burde få lommepenge, andre mente noget andet. Læreren vidste slet ikke, hvad han skulle mene, for han vidste ikke rigtig, hvor mange penge børn får i lommepenge. Hvor mange penge får en elev i 5. klasse i lommepenge? ”Jeg fortalte mine venner, at min 5. klasse i den kommende periode skal arbejde med at gennemføre undersøgelser, hvor man kan få svar på lige præcis den slags spørgsmål, og at jeg derfor ville bede dem begynde med at undersøge, hvor mange lommepenge eleverne i 5.B får. Vi skal altså indsamle lommepengeoplysninger fra hver af jer, og så skal vi bagefter finde en god måde at fortælle om vores undersøgelse til mine venner. Vi får alle om lidt en masse tal på tavlen. Det, I skal lære, er, hvordan vi kan komme fra alle de mange tal til at kunne fortælle nogen, hvad tallene siger.”

Undervisningsaktivitet:

Klassen indsamler i fællesskab data om deres egne lommepenge og diskuterer, hvad de kan/skal svare på spørgsmålet om, hvad en elev i 5. klasse får i lommepenge. De rå datasæt skrives på tavlen og behandles på forskellige måder – både efter elevernes og lærerens guiden og forslag. Fx kan data:

- omskrives, så tallene beskriver beløb pr. måned
- ordnes, så tallene står i rækkefølge efter størrelse
- inddeles i intervaller.

Data kan nu (efter elevernes input) beskrives med fx:

- grafiske fremstillinger (evt. pindediagram i regneark)
- typeinterval (flest)?
- beregning af middeltal
- beregning af variationsbredde (hvor stor forskel?).

Fællesgørelse:

Klassen opstiller i fællesskab en bruttoliste over de måder at behandle data på, som klassen samlet set ser ud til at råde over. Læreren søger sammen med eleverne at udbygge listen.

Undervisningsaktivitet:

Eleverne arbejder i grupper med databehandling – frit efter listen (ca. 30 minutter).

Fællesgørelse:

Hver gruppe præsenterer sit arbejde, og klassen kommenterer løbende ud fra omdrejningspunktet: Hvor mange penge får en elev i 5. klasse i lommepenge?

Der lægges vægt på at diskutere de forskellige deskriptorer og diagrammers styrker og svagheder – hvile oplysninger bliver tydelige, og hvilke oplysninger forsvinder?

Læreren lægger desuden vægt på at eksplicitere de fire faser i (den korte) modelleringsproces:

(opstille problemet, indsamle data, beskrive data, tolke resultatet) og fortæller om det kommende forløb og målene med arbejdet.

Afsluttende evaluering

I forløbets afsluttende evaluering skal eleverne præsentere deres egen modelleringsproces og de resultater, de har fundet frem til. Disse præsentationer giver bl.a. læreren gode muligheder for at vurdere og med noter registrere elevernes læring i forhold til flere læringsmål, bl.a.: ”Eleven kan begrunde sit valg i en modelleringsproces med fire faser: opstille problemet, indsamle data, beskrive data, tolke resultatet”. Lærerens vurdering kan både danne grundlag for feedback til eleverne om, hvad de kan gøre for at udvikle sig fortsat i retning af læringsmålene, og grundlag for at planlægge kommende undervisning.

3. Undervisningens tilrettelæggelse og indhold

Læreren skal tilrettelægge undervisning med sin viden og erfaring, så hvert enkelt elev lærer så meget som muligt. Det er også vigtigt, at undervisningen er anvendelsesorienteret og varieret. I afsnittet gennemgås centrale overvejelser om undervisningens tilrettelæggelse og indhold i [faget matematik.

3.1 Undervisningsdifferentiering i matematik

Folkeskoleloven stiller krav om, at undervisningen i alle fag skal tilrettelægges, ”… så den svarer til den enkelte elevs behov og forudsætninger” (§18). I det følgende gives der vejledning til, hvordan matematiklæreren konkret kan søge at praktisere dette princip, der generelt omtales som undervisningsdifferentiering.

I læringsmålstyret matematikundervisning er det en opgave for læreren at omsætte eller nedbryde læringsmålene fra Fælles Mål til mindre læringsmål, der kan fungere som en klasses trædesten frem mod de fælles læringsmål. I forbindelse med denne nedbrydning er det vigtigt, at læreren bl.a. medtænker princippet om undervisningsdifferentiering. Det kan fx ikke betragtes som hensigtsmæssigt, at læringsmålet: ”Eleven kan udvikle metoder til addition og subtraktion med naturlige tal” nedbrydes på en måde, så alle elever skal beskæftige sig med de samme afgrænsede talområder på samme tid – forskellige talområder kan tværtimod give differentieringsmuligheder. Generelt er det hensigtsmæssigt, hvis læringsmålene nedbrydes, så de kan bruges til at tydeliggøre over for eleverne, hvad det er, de skal kunne inden for overskuelige perioder, men det er ikke hensigtsmæssigt at nedbryde målene i så atomiserede dele, at de ikke giver plads til, at forskellige elever kan arbejde på forskellige niveauer og med forskellige tilgange. Det omtalte læringsmål kan fx omsættes eller nedbrydes til: ”Eleven kan demonstrere metoder til at addere tal ved hjælp af taltavlen”, fordi dette læringsmål – ud over at give en overskuelig ramme – giver plads til elevernes forskelligheder. Nogle elever kan fx arbejde med flercifrede tal på en tom tallinje, mens andre elever arbejder inden for de naturlige tal fra 1 til 100 på en tallinje, hvor intervaller er markerede. Alle elever vil stadig have en fælles ramme til at udvikle, udveksle, diskutere og vurdere forskellige metoder til addition på tallinjen.

I valget af undervisningsaktiviteter er det i et differentieringsperspektiv afgørende, at eleverne får mulighed for at arbejde på forskellige niveauer og med forskellige tilgange. Det betyder ikke nødvendigvis, at eleverne skal arbejde med forskellige aktiviteter. Fx kan åbne opgaver give differentieringsmuligheder. Disse opgaver kan fx være åbne ved at kunne besvares på forskellige måder eller ved, at eleverne kan finde løsninger gennem forskellige arbejdsformer.

Eksempel, 1. klasse

Eksemplet er knyttet til følgende læringsmål fra Fælles Mål: ”Eleven kan foretage enkle beregninger med naturlige tal” og ”Eleven kan anvende konkrete, visuelle og enkle symbolske repræsentationer”.

Aktivitet: Hvilke regnestykker kan I finde, som giver resultatet 10?

Først kommer nogle elever fra klassen med spontane forslag:

”5 + 5 giver 10”.

”9 + 1 giver også 10”.

Da læreren spørger, forklarer eleverne, at de kendte resultaterne på forhånd. Han beder en af eleverne vise, hvorfor 5 + 5 giver 10. Eleven holder sine hænder op i vejret:

”Man kan se, at 5 fingre på den ene hånd og 5 fingre på den anden hånd er 10 i alt … Vi har jo 10 fingre.”

Lærer: ”Kan I også vise 9 + 1 med fingrene?”

Elev: ”1 finger og 9 fingre giver også 10 i alt” (viser med hænderne).

Lærer: ”Hvad hvis jeg har 4 fingre (viser)? Hvor mange mangler jeg for at komme op på 10?”

Elev: ”1, 2, 3, 4, 5, **6**”.

I den næste periode arbejder nogle elever sammen to og to om at finde regnestykker, der giver 10 – andre elever arbejder alene. Læreren har i den periode mulighed for at støtte forskellige elever – med forskellige læringsmål – på forskellige måder.

Nogle elever har rigeligt at gøre med at tælle sig frem til stykker med to addender, der giver resultatet 10, og har svært ved at huske, hvordan et par af cifrene ser ud, når de skal skrive stykkerne ned. Læreren hjælper dem ved at tegne en talstang.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Andre elever har hurtigt fundet alle de additionsstykker med to addender, der giver 10. Læreren udfordrer dem ved at skrive sådan på et stykke papir:

____ + ____ + ____ = 10

____ - ____ = 10

Eleverne kan stadig tage fingrene til hjælp i forbindelse med den førstnævnte udfordring, men de får brug for centicubes til den sidstnævnte udfordring.

”Hvis jeg har 12 centicubes, hvor mange skal jeg så fjerne for at komme ned på 10?” spørger læreren for at sætte dem i gang.

Endelig er der nogle få elever, læreren udfordrer sådan:

_100_ - ____ = 10

_99_ - ____ = 10

_____ + ____ - _____ = 10

Læreren afslutter aktiviteten ved at bede eleverne skrive hver et af deres stykker på tavlen. Han får nogle af eleverne til at fortælle, hvordan de har fundet frem til deres stykke.

Elevernes papir med deres regnestykker sættes ind i hver deres mappe, hvor de samler nogle af deres produkter. Læreren har mulighed for at bruge mapperne i sin løbende evaluering og i forbindelse med skole-hjemsamtaler.

Eksempel, 4. klasse:

Eksemplet er knyttet til følgende læringsmål fra Fælles Mål: ”Eleven kan anslå og bestemme omkreds og areal”, ”Eleven kan gennemføre enkle modelleringsprocesser” og ”Eleven kan anvende enkle fagord og begreber mundtligt og skriftligt”.

Aktivitet: Jeg skal bygge et kolonihavehus, som er 48 kvadratmeter, hvordan kan grundplanen se ud?

Aktiviteten indledes med at indkredse begreberne kolonihavehus, kvadratmeter og grundplan i en fælles dialog. Elever og lærer taler også om, at grundplanen kan laves, så 1 centimeter på papiret svarer til 1 meter i virkeligheden. Læreren har medbragt et eksempel på en grundplan over et rektangulært hus i længdeforholdet 1 : 100, og klassen beregner i fællesskab husets areal.

Eleverne kan derefter vælge forskellige stykker papir til at tegne deres forslag til kolonihavehusets grundplan. Nogle vælger kvadratpapir, som er 1 centimeter · 1 centimeter, fordi det giver dem mulighed for at tælle sig frem til det rigtige areal. Andre vælger kvadratpapir, som er 0,5 centimeter · 0,5 centimeter, fordi det giver dem mulighed for at tegne i halve meter. Endelig er der nogle, der vælger blankt papir, fordi det giver dem større frihed til at tegne anderledes grundplaner.

Mens eleverne arbejder med deres grundplaner, har læreren mulighed for at udfordre dem på forskellige måder.

Nogle kan tegne flere forskellige rektangulære løsninger. De opfordres til at undersøge, hvor mange forskellige løsninger de kan finde, hvis husets vægge skal være et helt antal meter. Hvilke af løsningerne vil være gode at bo i?

Nogle kan tegne løsninger, hvor mindst én af væggene ikke er et helt antal meter.

Nogle kan tegne løsninger, som giver huset mere end fire hjørner.

Nogle kan tegne løsninger, hvor mindst en af husets vinkler ikke er rette.

Læreren bruger elevernes forskellige løsninger til at udvide aktiviteten:

Hvem kan forklare os andre, hvordan jeres hus ser ud, når vi ikke må se tegningen?

Nogle af eleverne fortæller på skift om deres løsning af opgaven. De andre elever i klassen forsøger at tegne efter deres mundtlige forklaringer. Eleverne får på den måde mulighed for at kommunikere med brug af matematikfaglige begreber:

”Væggene er parallelle 2 og 2 … Der er 4 vægge … Der er 4 rette hjørner … Huset har form som en firkant …” siger en elev.

”Hvilken slags firkant?” spørger en anden.

”Et rektangel. 2 af siderne er 8 centimeter, og de sidste 2 sider er 6 centimeter. Døren sidder …” fortsætter den første elev.

Husenes omkredse bliver også undersøgt. Når alle husene har arealet 48 kvadratmeter, har de så også samme omkreds? Hvilket hus giver den største omkreds?

Organisationsform til undervisningsdifferentiering

Valg af organisationsformer er endnu et område, som har betydning for lærerens mulighed for at differentiere undervisningen. Organisationsformerne skal bl.a. sikre, at læreren i perioder får mulighed for at tale med én eller få elever ad gangen længe nok til at kunne sætte sig ind i deres tænkning. Kun ved at vide, hvad eleverne tænker, får læreren mulighed for at tage udgangspunkt i elevernes forudsætninger og potentialer.

Mange matematiklærere har især på begynder- og mellemtrinnet oplevet, at det kan være vanskeligt at få denne tid sammen med enkeltelever eller med få elever ad gangen. Især kan det være problematisk, hvis mange elever har brug for hjælp på samme tid. Læreren kan hurtigt blive til en person, der springer rundt i klassen og kun når at give få informationer, inden han eller hun må videre til den næste, der har brug for hjælp.

For at imødekomme dette problem er det ofte en god ide at organisere undervisningen, så eleverne i perioder arbejder i grupper. En klasse med 24 elever kan fx deles i fire grupper, der ikke har den samme aktivitet. På den måde kan det planlægges, at lærerens hjælp er koncentreret omkring de grupper, som arbejder med opgaver, der kræver meget hjælp – eller med opgaver, som giver gode muligheder for, at læreren kan sætte sig ind i elevernes tænkning.

Eksempel, 4. klasse:

Klassen arbejder med følgende nedbrudte læringsmål:

- ”Eleverne kan multiplicere ved brug af rektangler, der repræsenterer multiplikationen”.
- ”Eleverne kan oversætte frem og tilbage mellem regneudtryk med multiplikation og hverdagssituationer med multiplikation”.
- ”Eleverne kan anvende den lille tabel til hovedregning”.

Klassens 24 elever er inddelt i fire grupper:

- I gruppe 1 arbejder eleverne med at udvikle metoder til multiplikation.
- I gruppe 2 arbejder eleverne med at skrive eller tegne regnehistorier, der kan knyttes til multiplikation.
- I gruppe 3 arbejder eleverne med at automatisere den lille tabel ved at spille gangebanko.
- I gruppe 4 arbejder eleverne med gangestykker i et computerspil.

Arbejdet i gruppe 3 og 4 er aktiviteter, som eleverne i klassen alle er kendt med. Arbejdet i gruppe 2 er eleverne til dels kendt med, fordi de har prøvet noget tilsvarende i forbindelse med addition og subtraktion. Arbejdet i gruppe 1 er nyt for eleverne, og læreren fortæller på forhånd, at han eller hun mest vil bruge sin tid i denne gruppe. I gruppe 2 kan eleverne forvente at få noget hjælp, mens gruppe 3 og 4 så vidt muligt skal arbejde selvstændigt.

Grupperne arbejder på denne måde i det meste af en lektion. I næste lektion rokerer grupperne, så de i løbet af fire lektioner kommer igennem alle aktiviteterne.

Organisationen i grupper – eller i værksteder – giver også mulighed for, at eleverne kan arbejde med forskellige tilgange til det samme faglige emne. I 6. klasse kan det fx tænkes, at nogle elever har særlig glæde af at arbejde med ligningsløsning ved hjælp af fysiske handlinger med konkrete materialer, mens andre arbejder med ligninger med støtte i illustrationer, og andre igen arbejder med ligninger med udgangspunkt i det matematiske symbolsprog.

I forbindelse med organisationsformer, der baserer sig på elevers forskellige tilgange til læring, er det vigtigt at være opmærksom på, at den centrale aktivitet for alle eleverne er deres tænkning – ikke de fysiske handlinger. Eleverne lærer fx ikke multiplikation ved at kaste en bold til hinanden eller ved at synge tabelsange – men ved at de gennem tænkning forbinder det nye begreb med viden, de allerede har gjort til deres egen. Aktiviteter med konkrete materialer eller med illustrationer kan støtte elever til dette, mens boldkast og tabelsange højst hjælper nogle elever til at lære udenad.

I perioder eller sekvenser, hvor undervisningen baserer sig på klassens dialog, er det naturligvis oplagt, at klassen arbejder samlet med læreren som leder. Læreren har i denne organisationsform mulighed for at inddrage elevernes forskellige input i dialogen ved fx at spørge, reformulere og konkludere på baggrund af elevernes input. I en sådan undervisning bidrager elevernes forskellighed til at lægge forskellige perspektiver på den faglige samtale.

3.2 Opmærksomhedspunkter

I tilknytning til nogle få af læringsmålene fra Fælles Mål er der formuleret såkaldte opmærksomhedspunkter i dansk, matematik og i børnehaveklassen. Et opmærksomhedspunkt er en beskrivelse af den mindste grad af målopfyldelse i forbindelse med udvalgte læringsmål, som er en forudsætning for, at eleverne kan få tilstrækkeligt udbytte af de efterfølgende klassetrin. Læreren skal være særlig opmærksom på, om eleverne opnår grundlæggende viden og færdigheder. Opmærksomhedspunkterne kan således støtte matematiklæreren til at vurdere, hvornår en elev har brug for særlig opmærksomhed. Hvis en elev ikke opfylder den grad af målopfyldelse, der er udtrykt i et af opmærksomhedspunkterne, må matematiklæreren på denne baggrund indlede en dialog på skolen med skolelederen og skolens ressourceperson i matematik om at iværksætte den nødvendige indsats for at sikre elevens fortsatte faglige udvikling. På mange skoler foregår en sådan indsats i samarbejde med skolens matematikvejleder.

Opmærksomhedspunkterne er knyttet til 3. klassetrin, 6. klassetrin og 9. klassetrin – flest i indskolingen og færrest i udskolingen, i alt otte opmærksomhedspunkter. Klassetrinnene indikerer, hvornår i skoleforløbet det forventes, at eleverne som minimum har opfyldt den beskrevne grad af målopfyldelse. Det er imidlertid hensigtsmæssigt at iværksætte en indsats så tidligt som muligt i forhold til de elever, der ser ud til ikke at kunne opfylde den mindste grad af målopfyldelse på de angivne klassetrin. I forbindelse med de to opmærksomhedspunkter i 9. klasse er det naturligvis kun en mulighed at iværksætte en indsats, før eleverne forlader skolen.

En sådan indsats i matematik kan tilrettelægges på mange forskellige måder. Internationalt er der med programmer som Mathematics Recovery (Wright, R.J., Martland, J. & Stafford, A.K. (2006): *Early Numeracy – assessment for teaching and intervention, 2nd edition.* Paul Chapman Publishing, London.) og Nummeracy Recovery (Dowker, A. (2004): *What Works for Children with Mathematical Difficulties?* University of Oxford). høstet gode erfaringer med korte, intensive træningsforløb i tal og regning. Også i Danmark har der i de senere år været fokus på organiseringen af en tidlig indsats. I en konkret indsats kunne også indgå lektielæsning mv. i regi af understøttende undervisning. Læs mere om tidlig indsats i matematik på EMU-portalen.

Det er vigtigt at være opmærksom på, at der kun er formuleret opmærksomhedspunkter i tilknytning til udvalgte læringsmål inden for et afgrænset område af stof- og kompetenceområderne. Opmærksomhedspunkterne er især formuleret i tilknytning til de færdigheds- og vidensmål inden for tal og algebra, som har særlig betydning i det senere skoleforløb, herunder i undervisningen inden for andre af skolens fag og i elevens hverdagsliv. Opmærksomhedspunkterne er således ikke udtryk for, hvilke mål der er vigtigst, og en elevs arbejde med matematik kan ikke reduceres til udelukkende at rette sig mod opmærksomhedspunkterne. Alle elever skal arbejde med alle mål.

3.3 Læremidler

I forbindelse med valg af aktiviteter kan en lærebog være til stor hjælp. En stor del af de lærebøger, som er på markedet, rummer aktiviteter, der kan indgå i arbejdet med læringsmålene fra Fælles Mål.

Som matematiklærer er det imidlertid også vigtigt at være opmærksom på, at undervisningen ikke skal tage udgangspunkt i bøgerne – men i eleverne og i det, de skal lære. I planlægningen af et forløb må læreren vurdere, om en bestemt lærebog har noget at bidrage med i forhold til den hensigt, læreren har med undervisningen. Om en lærebog er god, afhænger naturligvis af den situation, den skal bruges i. Det afhænger af læreren og af eleverne – og det afhænger af måden, den bliver brugt på.

De følgende spørgsmål er ment som en hjælp til at vurdere, hvordan en lærebog eller et andet læremiddel kan indgå i undervisningen. Det må forventes, at alle lærebøger i større eller mindre omfang må suppleres af lærerens egne ideer til aktiviteter i undervisningen.

Kriterier fra et målperspektiv:

- Hvordan harmonerer læremidlets indhold med læringsmålene fra Fælles Mål?
- Hvilken faglig progression lægges der op til?
- Giver læremidlet mulighed for at arbejde målstyret?

Kriterier fra et læringsperspektiv:

- Hvordan understøtter læremidlet princippet om undervisningsdifferentiering?
- Hvordan understøtter læremidlet elevernes undersøgende arbejde i matematik?
- Hvordan understøtter læremidlet varierede og anvendelsesorienterede undervisningsformer?
- Hvilke muligheder giver læremidlet for elevers og lærers faglige dialoger om og med matematik?
- Hvilken grad af åbenhed er der i læremidlets oplæg til aktiviteter?

Kriterier fra et sprogligt perspektiv:

- Hvilke muligheder giver læremidlet eleverne for at udtrykke deres faglige forståelser?
- Hvilke muligheder giver læremidlet eleverne for at koble hverdagssprog med matematiske begreber?
- Hvilke dele af læremidlets tekster er det muligt for forskellige elever at læse selvstændigt?
- Hvordan supplerer tekstens forskellige tekst, figurer, tegninger, diagrammer etc. hinanden?

Kriterier fra et planlægningsperspektiv:

- Hvilke organisationsformer kan læremidlet anvendes i?
- Kan læremidlet anvendes i sammenhæng med andre læremidler?
- Kan læremidlet anvendes sammen med matematiske hjælpemidler?
- Hvilken støtte kan læreren hente i en evt. tilhørende lærervejledning til undervisningens planlægning?

3.4 It og medier

Igennem de seneste årtier er it kommet til at spille en stadig større rolle i det danske samfund, i elevernes hverdag og i folkeskolens matematikundervisning. It-kompetencer er blevet en naturlig del af såvel den almene dannelse, som de krav, uddannelser og arbejdsliv stiller. Det er således let at argumentere for, at it bør indtage en central plads i folkeskolens undervisning, herunder naturligvis matematikundervisningen, men dette åbner imidlertid for en lang række spørgsmål, fx om hvordan it kan anvendes på en måde, så det kommer til at støtte elevernes tilegnelse af matematiske kompetencer. Det er nemlig på ingen måde sådan, at it kan støtte enhver hensigt med undervisningen. Det bør fra forløb til forløb overvejes, hvordan anvendelsen af it kan støtte elevernes opfyldelse af læringsmålene. Det er fx sjældent en hensigtsmæssig inddragelse af it, hvis det medfører, at eleverne kigger passivt på en interaktiv tavle.

It indgår både som mål og middel i matematikundervisningen. Først og fremmest er it et middel til, at eleverne opnår læringsmålene, fx kan forskellige digitale værktøjer anvendes som redskab i problemløsning og anden opgaveløsning og dermed give nye muligheder i arbejdet med matematik. Samtidig er det et mål, at eleverne opnår hjælpemiddelkompetence, som det er beskrevet i Fælles Mål, herunder fx at kunne anvende digitale værktøjer til undersøgelser, kunne vælge hjælpemiddel og vurdere forskellige hjælpemidlers muligheder og begrænsninger. Det er imidlertid helt afgørende, at eleverne tilegner sig disse kompetencer i arbejdet med relevante matematiske stofområder, således at hjælpemiddelkompetencen ikke løsrives fra arbejdet med de matematiske stofområder.

Det er flere gode grunde til at inddrage it i matematikundervisningen. For det første er det vigtigt, at folkeskolen i videst muligt omfang ligner det omgivende samfund, hvor eleverne til daglig er omgivet af smartphones, computere, tablets og lignende, som indgår naturligt og med selvfølgelighed i deres hverdag. Hvis den verden, eleverne møder i skolen, er meget fjern fra den, de møder uden for skolen, kan skoleverdenen opleves som en parallelverden og miste sin legitimitet. Eleverne vil simpelthen ikke kunne forbinde det, de lærer i skolen, med den verden, de møder uden for skolen.

For det andet kan it i en række tilfælde støtte elevernes forståelse af faglige begreber og sammenhænge – især fordi en række digitale værktøjer giver eleverne mulighed for at visualisere, undersøge og eksperimentere med disse matematiske begreber og sammenhænge, fx ved at gentage en beregning, tegning eller lignende mange gange eller ved at simulere et stokastisk eksperiment et stort antal gange. Eleverne kan på den måde meget hurtigt afprøve rigtig mange eksempler og derudfra opstille hypoteser om generelle sammenhænge. Det kan fx være eksperimenter i et regneark, hvor eleverne undersøger, hvordan et datasæt skal se ud, for at medianen er mindre end middeltallet, eller et geometriprogram, som bruges til at undersøge sammenhængen mellem omkreds og areal i et rektangel i indskolingen eller sammenhængen mellem en cirkels periferivinkel og centervinkel i udskolingen. De hypoteser, som eleverne formulerer på baggrund af deres undersøgelser, kan i nogle tilfælde, især på de ældste klassetrin, være udgangspunkt for mere formelle matematiske ræsonnementer og beviser. I andre sammenhænge er undersøgelserne med til at give eleverne forskelligartede erfaringer med og billeder af matematiske begreber, som fx median og middeltal ovenfor, eller matematiske sammenhænge, som fx sammenhængen mellem centervinkel og periferivinkel i eksemplet. På den måde skal arbejdet med digitale værktøjer give eleverne erfaringer, som sammen med en række andre typer af aktiviteter og undersøgelser er med til at opbygge deres begrebsdannelse.

For det tredje giver it mulighed for at arbejde med anderledes og tidssvarende kommunikationsformer om og med matematik. I den forbindelse kan der i undervisningen indgå digitale værktøjer som regneark, CAS, dynamiske geometriprogrammer og præsentationsprogrammer samt programmer til video- skærm- og lydoptagelser. Digitale hjælpemidler til brug i matematik stiller ofte store krav til elevernes fagsprog og matematiske symbolsprog. Det kan i nogle tilfælde virke hæmmende på elevernes brug af nogle programtyper, fx CAS, men det kan samtidig være med til at øge elevernes fokus på – og dermed udvikle – deres fagsprog og brug af matematiske symboler. Ud over de fagspecifikke programmer er også anvendelse af it til lyd- video- eller skærmoptagelser særdeles relevant i matematikundervisningen. Disse redskaber giver eleverne en række nye måder at udtrykke sig om matematiske forhold på, som kan være særdeles udbytterige, fx som evalueringsaktivitet. Det kan fx være et videooptaget nyhedsindslag, hvor eleverne præsenterer en statistisk undersøgelse, de har gennemført, eller det kan være en skærmoptagelse af en undersøgelse i et geometriprogram af diagonalernes skæring i forskellige firkanter.

Programmering

Programmering er en samlebetegnelse for arbejdet med at skrive og revidere computerprogrammer.

Et computerprogram er en præcis beskrivelse af, hvordan en computer skal behandle nogle inputdata og generere nogle outputdata. Inputdata kan fx være nogle tryk på piletasterne eller en liste af tal fra temperaturmålinger, og outputdata kan fx være bevægelser af en figur (sprite) på skærmen eller beregning af en middeltemperatur. Når man arbejder med programmering, vil man ofte afprøve sit program, rette det løbende til og forbedre det.

Der findes både tekstprogrammeringssprog og mere visuelt orienterede programmeringssprog. Med visuelle programmeringssprog kan børn ned til indskolingen skrive mindre programmer (her kan man finde programmeringssprog henvendt til børn til hhv. computer og iPad: **http://scratch.mit.edu/** ; **https://www.gethopscotch.com/**) (på **http://code.org/** er der inspiration til at komme i gang med at programmere med sine elever, fx i form af forskellige programmeringsspil af stigende sværhedsgrad, der skal fungere som forløber for mere fri programmering)

Programmering og matematik?

Programmering relaterer til matematik på en række måder. Dels er ideen om at programmere en datamaskine et resultat af matematiske (og tekniske) landvindinger, dels anvendes programmering ofte i matematisk arbejde uden for skolen. De vigtigste måder, hvorpå programmering kan understøtte matematiklæring i folkeskolen, opdeles i tre overgribende kategorier samt en række konkrete relationer til begreberne i fælles mål.

1: Tænke i processer og algoritmer

Programmeringsaktiviteter kan understøtte, at eleverne arbejder med algoritmer, forstået som systematiske beskrivelser af problematikker, løsningsstrategier og hændelsesforløb. En opskrift er et godt eksempel på en algoritme. (1) Hæld de tørre ingredienser sammen. (2) Rør rundt. (3) Tilsæt 2/3 af vandet, og rør rundt. (4) Hvis dejen er lind, så rør i 2 min. Ellers gå til punkt (3), og tilsæt mere vand. Algoritmisk tænkning handler om at kunne opstille og få maskiner til at udføre sådanne algoritmer. Det vil ofte handle om at kunne analysere, forestille sig og forstå, hvad man vil have programmet til at gøre for derefter successivt at nedbryde denne adfærd i de elementer, programmeringssproget kan tilbyde. Det understøtter præcision og logisk tænkning, og eleven kan opleve, hvordan meget små ændringer af programmet kan have store konsekvenser for programmets opførsel.

2: Digital produktion

Ved hjælp af programmering kan elever bygge forskellige ting med logik og matematik. Det kan være små computerspil, robotter eller et program, der løser et konkret problem. Ved at eleverne får oplevelsen af, at de kan skabe noget nyt med matematik og programmering, kan det understøtte en oplevelse af matematik som meningsfuldt.

3: Udvikling af abstrakt tænkning

Ved at skrive computerprogrammer, der svarer til matematikkens abstrakte konstruktioner, opnås endnu en repræsentation af disse begreber, og den logiske sammenhæng til andre matematiske begreber kan i nogle tilfælde tydeliggøres.

De fleste af de matematiske kompetencer kan også sættes i spil, når man arbejder med programmering, men især ræsonnements-, problembehandlings-, symbolbehandlings-, modellerings- og repræsentationskompetencerne bringes ofte i spil.

Plangeometri, koordinatsystemet og vinkler kan være nogle af de områder, man kommer til at arbejde med, når man skal i gang med programmering, fx for at kunne placere og flytte en sprite rundt på skærmen i Scratch eller Hopscoth.

Tal og algebra og især begrebet variable er andre områder, som eleverne gennem programmering kan arbejde med i en meningsfuld kontekst. Eleverne vil fx ved at producere små programmer med pointtællere eller liv få nogle indledende erfaringer med variable, og de vil samtidig få konkret feedback fra programmets output om variables funktion. De vil desuden skulle bruge funktioner og formler, hvis de fx skal lave et program, der beregner en cirkels areal på baggrund af et input i form af radius.

Eksempler fra praksis

Forløb om simple konstruktioner i 3. klasse

I en 3. klasse arbejder eleverne med geometri. Eleverne laver små programmer, der kan tegne plane figurer i det visuelle programmeringssprog Scratch. Målene, de skal nå, er følgende:

Færdigheds- og vidensmålet for problembehandling:

- ”Eleven kan løse enkle matematiske problemer/eleven har viden om enkle strategier til matematisk problemløsning” nedbrydes til læringsmålet:

- Eleverne skal kunne lave et program, der får katten på skærmen til at bevæge sig i forskellige figurer, som er bestemt på forhånd.

For ræsonnement og tankegang oversættes færdigheds- og vidensmålet:

- ”Eleven kan give og følge uformelle matematiske forklaringer” og ”Eleven har viden om enkle matematiske forklaringer”

til læringsmålet:

- Eleverne skal kunne følge og rette en opskrift på et program, så der bliver tegnet de figurer på skærmen, som opskriften viser.

Fra kompetenceområdet geometri og måling nedbrydes færdigheds- og vidensmålet:

- ”Eleven kan tegne enkle plane figurer ud fra givne betingelser” og ”Eleven har viden om geometriske egenskaber ved plane figurer” samt fra mellemtrinnet ”Eleven kan beskrive placeringer i hele koordinatsystemet’”

til læringsmålet:

- Eleverne skal kunne lave et program, der får katten til at tegne et kvadrat, et rektangel og en trekant.

Før eleverne introduceres til programmering i Scratch, lader læreren eleverne programmere hinanden. En elev (fx med bind for øjnene) får i form af mundtlige ordrer et program, han skal udføre ved at bevæge sig. Gå tre skridt sidelæns, drej en halv omgang og gå fire skridt frem osv.

Eleverne kan nu gå i gang med Scratch. De kan enten bygge koden op fra bunden, eller de kan arbejde videre i et eksisterende program. Det er vigtigt, at eleverne tænker over, hvad der sker i deres program, og hvordan programkoden bliver til en figur på skærmen.

Derefter kan eleverne gå videre til nogle mere lukkede udfordringer, hvor de skal lave deres tidligere programmer om, så det konstruerer nogle bestemte figurer, fx rektangler, trekanter, cirkler osv. Det vil udfordre deres forståelse af disse figurers definitioner. Eleverne vil måske anvende en trial and error-strategi, men det er meningen, at deres problemløsningsstrategier efterhånden bliver mere kvalificerede.

Endelig kan eleverne løse mere åbne opgaver eller udarbejde projekter, hvor de selv afgrænser og præciserer kriterierne for opgaven. Man kan fx starte med at bede eleverne om at lave en figur med fire hjørner, hvor der er tre spidse og en stump vinkel. Her er det nødvendigt at bryde det overordnede problem ned i mindre problemer, der efterfølgende løses et ad gangen.

Forløb om formler og variable i 7. klasse

En 7. klasse har arbejdet med tal og algebra, geometri samt de matematiske kompetencer for problembehandling, ræsonnement og tankegang og repræsentation og symbolbehandling.
I forløbet skal eleverne programmere regnemaskiner, der, når man indtaster eksempelvis sidelængder, højde eller radius, kan finde areal, omkreds og lign. mål i forskellige plane figurer. Eleverne programmerer i forskellige af følgende programmer/programmeringssprog: regneark, GeoGebra, Scratch, Visual Basic og Hopscotch.

Fra de matematiske kompetencer er færdigheds- og vidensmålene:

- ”Eleven kan planlægge og gennemføre problemløsningsprocesser”, ”Eleven kan udvikle og vurdere matematiske ræsonnementer, herunder med inddragelse af digitale værktøjer” og ”Eleven kan anvende udtryk med variable, herunder med digitale værktøjer".

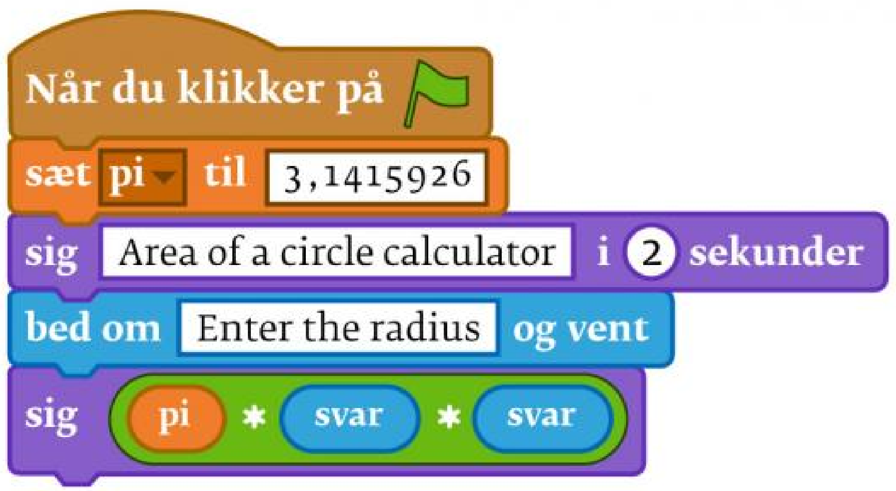
Fra kompetenceområderne tal og algebra samt geometri er målene:

- "Eleven kan beskrive sammenhænge mellem enkle algebraiske udtryk og geometriske repræsentationer" og "Eleven kan bestemme mål i figurer ved hjælp af formler og digitale værktøjer".

Færdigheds- og vidensmålene oversættes til læringsmålene:

- Eleverne kan bruge deres viden om arealformler for forskellige figurer til at programmere en regnemaskine, der kan finde arealet af en trekant, et rektangel, en vilkårlig firkant og en cirkel
- Eleverne kan bruge deres viden om omkredsformler for forskellige figurer til at programmere en regnemaskine, der kan finde omkredsen af en retvinklet trekant, en cirkel, et kvadrat, et rektangel og et parallelogram, og
- Eleverne kan vise og forklare, hvordan deres program virker, og kunne overbevise modtageren om, at det regner rigtigt.

Som indledning til forløbet kan eleverne gå ind på siden **her** og analysere den programkode, der hører til programmet. Efterfølgende kan de indspille en skærmoptagelse, hvor de viser og forklarer, hvordan og om programmet fungerer efter hensigten. Her bliver de bedt om at analysere det eksisterende program med henblik på senere at kunne justere på det, så det passer til andre arealformler.



de følgende lektioner arbejder eleverne ud fra opgaver, der stilles som udfordringer af typen: Kan du programmere en regnemaskine, der beregner omkreds og areal af et rektangel, hvis du indtaster længde og bredde. Kan du beregne radius af en cirkel, hvis du kender omkredsen? Endelig kan eleverne helt frit udvikle deres egne regnemaskiner.

Læs mere på **EMU**

3.5 Sproglig udvikling

I det følgende fokuseres der på det element af elevers sproglige udvikling i matematik, der ofte omtales som faglig læsning.

I matematikundervisningen skal eleverne både lære at afkode og læse tekster af autentisk karakter, hvori matematik indgår som redskab til formidling, og tekster, som skal understøtte deres matematiklæring. I forbindelse med den sidstnævnte type tekster skal eleverne bl.a. udvikle færdigheder i at afkode og læse matematiske problemstillinger. Herunder indgår elevernes færdigheder i at finde og aflæse relevant information.

At læse handler dels om at afkode ordene i en tekst, dels om at forstå det læste. Læsning er en aktiv proces, hvor eleverne møder matematikteksten med deres forhåndsviden om det givne indhold i teksten. Når elevernes forhåndsviden aktiveres, kan der skabes mening og sammenhæng i den læste teksts informationer. En af de faktorer, der har størst betydning for, hvad elever forstår og husker af det læste, er den forhåndsviden, som de møder teksten med. Teksten bliver meningsfuld, når eleverne formår at knytte indholdet til det, som allerede vides om emnet. Dermed bliver det muligt for eleverne at danne mentale billeder af det læste. De mentale billeder gør det muligt at tænke matematik og udvikle begrebsforståelse.

Det er altså vigtigt, at elevernes forhåndsviden aktiveres i mødet med teksten, men det er ikke nok blot at aktivere denne viden, eleverne må også være i stand til at navigere rundt i teksten og finde sammenhæng mellem informationer på tværs af teksten og ræsonnere på baggrund af den viden, de i forvejen har med sig. For at vælge en hensigtsmæssig læsestrategi til dette er det en hjælp at have kendskab til genren. Et væsentligt spørgsmål er derfor, hvad der kendetegner tekster, der handler om matematik? Det er ikke realistisk at forestille sig, at alle matematiktekster kan karakteriseres på samme måde, men der er nogle kendetegn, som elever møder ofte i tekster om matematik.

Et væsentligt træk ved matematiktekster er, at de ofte består af andet end skrevne ord – det er altså tekster, der er sat sammen af forskellige dele, fx matematisk symbolsprog, skemaer, tabeller, diagrammer, figurer, huskekasser, faktakasser, fotos, tegninger m.m. De skrevne ord kan have forskellige funktioner. Det kan være berettende fortællinger, opgaveinstruktioner, ordforklaringer m.m. Der er vigtige fagudtryk, som eleverne skal kende, men der er også visse ordsammensætninger, som bruges på en bestemt måde i faget. Eksempler kan være større end, mindre end, hvis og kun hvis … Ligeledes har illustrationerne forskellige funktioner. Nogle skal gøre siden læsevenlig, mens andre illustrationer kan indeholde vigtige informationer eller måske ligefrem en instruktion. Det kan altså være et kompliceret, men spændende landskab at bevæge sig rundt i for eleverne.

Hvis matematikundervisningen tager udgangspunkt i en bestemt matematikbog, kan det være en stor hjælp for eleverne at arbejde med, hvad der kendetegner matematikteksterne i netop denne bog. Det er med til at give eleverne en hensigtsmæssig læsestrategi at være bevidst om, hvordan matematikbogen er bygget op. Det kan være, at bogens kapitler indeholder forskellige sidetyper, at bestemte sider altid er bygget op på en bestemt måde, at vigtige informationer er placeret et bestemt sted osv. Derudover må læreren hjælpe eleverne til at blive bevidste om, at ordene ofte ikke skal læses alene, men skal sammenkædes med en illustration, en tabel, en graf eller lignende, ligesom elementerne kan have forskellig status. Rækkefølgen, de enkelte dele læses i, kan også være væsentlig. I matematiske tekster med figurer, skemaer, tabeller, grafer og lignende skal man ikke nødvendigvis altid læse alle informationerne. Her er det derfor vigtigt at vide, hvordan informationerne er organiseret, så man har mulighed for at finde de informationer, der er vigtige. Det bliver dermed helt centralt at kunne vælge en læsestrategi, der er hensigtsmæssig.

Når eleverne læser i matematik, er hensigten for det meste, at de skal løse en opgave, altså ligner det andet hovedformål med faglig læsning i matematik. For at kunne løse en opgave må man vide, hvad problemstillingen er. Mange lærere møder elever, der spørger: "Hvad skal man i den her opgave?" Det kan altså være vanskeligt for elever at identificere, hvad problemstillingen egentlig er. Her må læreren passe på med ikke altid blot at give elever forklaringer – hvis eleverne skal udvikle deres kompetence i faglig læsning af matematiske tekster, bliver de nødt til at arbejde med at udvikle hensigtsmæssige strategier. Læreren kan gå i dialog med eleverne om opgaven eller opfordre eleverne til at gå i dialog med hinanden med spørgsmål som: Prøv at fortælle med jeres egne ord, hvad der står. Hvilke oplysninger giver teksten jer? Hvor står spørgsmålet henne? Hvad får I at vide? Kan I lave en tegning af problemstillingen? Når eleverne med egne ord formulerer sig om problemstillingen, har de mulighed for at danne mentale billeder af problemstillingen og dernæst vælge en løsningsstrategi, der er hensigtsmæssig. Eleverne må som aktive læsere forholde sig aktivt til problemstillingen – her er det vigtigt at kunne reflektere over problemstillingen, evt. lave et overslag og reflektere over svaret i forhold til spørgsmålet. Eleverne må blive fortrolige med den type af spørgsmål, der stilles i matematik. Det er netop kernen i tankegangskompetencen: At stille spørgsmål, som er karakteristiske for matematik, og have blik for, hvilke typer af svar som kan forventes.

Et aspekt af faglig læsning i matematik er altså, at eleverne skal lære at overskue og sammenkæde forskellige teksttyper og illustrationer på en side, finde væsentlige oplysninger, bruge dem i problemløsning og reflektere over spørgsmål og svar, men eleverne må et lag dybere endnu, når det handler om læsning af matematik. Matematikken er ofte iklædt fortællinger, illustrationer, symboler m.m., og disse forskellige dele er forskellige repræsentationer for selve matematikken. Matematikken opfattes ofte som meget abstrakt, men vi arbejder med den i de forskellige repræsentationer. Det er netop ved at arbejde med flere forskellige repræsentationer af det matematiske begreb og danne relationer mellem repræsentationerne, at eleverne udvikler matematisk forståelse og altså lærer matematik – og det må være en stor del af formålet med faglig læsning.

Kompetenceområdet repræsentation og tankegang er således helt centralt i forbindelse med faglig læsning – matematiske tekster kan betragtes som en sammensætning af forskellige repræsentationer. Ud over at eleverne skal kunne afkode de skrevne ord, har matematikken altså et sprog i sig selv – et univers af repræsentationer, hvor de skrevne ord kan være ét af dem – som eleverne lærer at kende, selv skal udvikle og skal lære at udtrykke sig ved hjælp af.

I situationer, hvor eleverne skal løse et praktisk problem fra den virkelige verden, skal de ofte læse matematikholdige tekster, der kan sætte dem i stand til at forstå noget af den kontekst, problemet er i, og som giver dem de oplysninger, der sætter dem i stand til at løse problemet vha. matematik, fx ved at opstille en matematisk model.

Faglig læsning i overbygningen vil ofte kræve, at eleverne forholder sig til spørgsmål som:

· Hvad er læseformålet? Fx at lære noget matematik eller at løse et problem, der kræver læsning af matematikholdige tekster.

· Hvad tror jeg, forfatteren eller opgavestilleren vil have os til at gøre?

· Hvad ved jeg i forvejen? Både om det emne (praktisk eller matematisk), der skal arbejdes med, og de matematiske begreber, der er med i teksten.

· Hvilken læsestrategi skal jeg anvende? Hvilken læsemåde skal jeg anvende?

· Er der nogle fagord, jeg skal have forklaret? Både matematiske begreber og begreber fra teksten vedrørende det praktiske problem. Det kan gøres til jagten på de svære ord.

· Hvordan skal jeg holde rede på det, jeg læser? Fx notater, tegninger osv.

Ofte vil faglig læsning og problemløsning med fordel foregå i et samarbejde mellem to elever. Faglig læsning i et makkerparsamarbejde kunne foregå efter følgende opskrift:

· Læs teksten højt for hinanden (læseafkodning).

· Genfortæl teksten for hinanden (læseforståelse).

· Hvad handler teksten om, hvad er opgaven, og hvordan skal den løses (elementær læsekompetence)?

· Tegn et billede af opgaven (mental repræsentation).

· Hvilke løsningsstrategier kan vi bruge, og hvilken skal vi vælge (funktionel læsekompetence og matematisk kompetencer)?

· Giv et overslag (hverdagserfaringer og talforståelse).

· Beregn resultatet (matematiske færdigheder).

· Sammenlign resultatet med overslaget og spørgsmålet (refleksion).

3.6 Innovation og entreprenørskab

Matematik er et af de fag i folkeskolen, der giver muligheder for at udvikle elevernes kompetencer inden for innovation og entreprenørskab: ”Entreprenørskab er, når der bliver handlet på muligheder og gode ideer, og disse bliver omsat til værdi for andre. Den værdi, der skabes, kan være af økonomisk, kulturel eller social art" (Definitionen er udarbejdet af Fonden for Entreprenørskab på baggrund af EU og OECD).

Entreprenørskab er således handlingen og bestræbelsen på at omsætte muligheder til værdi; at forsøget måske ikke lykkes, gør ikke handlingen mindre entreprenøriel. Denne bygger på kreativitet, innovation og iværksætteri:

- Kreativitet er evnen til at få ideer, se og skabe muligheder samt evnen til problemløsning.
- Innovation er en social proces, hvor muligheder identificeres, og kreativiteten bruges til at skabe nyt, som er værdifuldt for én selv og andre.
- Iværksætteri er at sætte noget i gang, uden at det nødvendigvis indebærer, at der skabes noget nyt.

I målene for matematik er innovation og entreprenørskab ikke omtalt direkte, men arbejdet med nogle af læringsmålene kan samtidigt rettes mod innovation og entreprenørskab. Det gælder især læringsmålene under modellering.

Man kan fx forestille sig, at læringsmålet for 7.-9. klassetrin under matematiske kompetencer, fase 2, ”Eleven kan gennemføre modelleringsprocesser, herunder med inddragelse af digital simulering”, giver anledning til følgende oplæg:

Et mejeri overvejer at begynde en produktion af kartoner med 1,5 liter mælk. Spørgsmålet er, hvordan kartonen skal se ud? Der skal helst ikke bruges for meget pap til fremstillingen af kartonen, og den skal være god at transportere og god at holde på, når man hælder mælk fra den. Jeres opgave er at fremstille en model (fx en tegning) af en mælkekarton, der opfylder disse krav.

Oplægget kan give anledning til, at eleverne gruppevist diskuterer forskellige muligheder vedrørende mælkekartonens form. Hvilken form og hvilke mål kan den i det hele taget have, hvis den på samme tid skal kunne rumme 1,5 liter, forbruge lidt pap, være god at hælde af og let at transportere? Eleverne må igennem deres samarbejde både identificere muligheder og bruge kreativitet for at skabe et produkt, der, i princippet, kunne være værdifuldt for dem selv og andre. Måske medfører denne innovative og kreative proces et produkt der, i princippet, kunne omsættes til værdi – specielt hvis den model, eleverne fremstiller, har et minimalt forbrug af pap.

Allerede i indskolingen kan eleverne i matematik arbejde mod innovation og entreprenørskab, fx i tilknytning til læringsmålet: "Eleverne kan tolke matematiske resultater i forhold til enkle hverdagssituationer". I et undervisningsforløb kan det tænkes, at eleverne i en 3. klasse får til opgave at fremstille en model af deres skolegård, som de kunne tænke sig, den så ud.

I begyndelsen af forløbet arbejder klassen med set fra oven-tegninger. Eleverne har opmålt og tegnet deres klasseværelse set fra oven, og de har tegnet inventar på tegningen, så godt det kan lade sig gøre. Lærerne har introduceret en tændstik som en miniatureudgave af en meterstok, så eleverne kan bruge den til at tegne tingene tilnærmelsesvist i de rette forhold.

Selve skolegårdsforløbet begynder med en idefase, hvor eleverne kommer med ideer til, hvilke funktioner en legeplads skal have. Det kan fx tænkes, at eleverne har som de vigtigste forslag, at de skal kunne spille bold og lege fangelege, men også, at der skal være plads til at hygge sig nogle få sammen eller alene.

Lærerne har på forhånd målt skolegården op og tegnet den i et passende målforhold på A2-papir. Samtidig har de lavet målepinde af lister i 10 millimeters bredde og tilpasset længdeforholdet, så de svarer til 10 meter og underdelt i "meter". På den måde har eleverne hele tiden en fornemmelse af, hvordan deres tegnede model passer med virkelighedens verden, hvilket harmonerer med det nævnte læringsmål for forløbet. Når eleverne diskuterer størrelsen af en ting, kan de måle efter med en rigtig meterstok for at se, om det matcher deres ideer om størrelsen af fx et legestativ.

Det kan være svært for nogle af eleverne i 3. klasse at se den tredimensionelle virkelighed i en tegning i to dimensioner, og flere har lyst til at folde legeredskaberne ud i tre dimensioner. Spørgsmål om, hvad man kan se på en set fra oven-tegning, melder sig automatisk:

- Hvordan kan man finde ud af, hvor højt klatrestativet er?
- Hvordan kan vi tegne, så man kan se skolegården fra flere sider?

Senere i forløbet begynder arbejdsfasen, hvor eleverne skal få deres tegnede model af skolegården til at udfolde sig i et tredimensionelt univers. Hele tiden gør elever og lærere sig tanker om modellens anvendelighed i forhold til det stykke virkelighed, de ønsker at beskrive. Samtidig handler det overordnet set om at få ideer, se og skabe muligheder samt løse problemer – det er en kreativ proces, som giver mulighed for at skabe noget, der, i princippet, kan have værdi for andre. Efterfølgende kan lærere støtte eleverne i at gøre forsøget på at få en eller flere af deres ideer omsat til virkelighed, fx ved at præsentere ideerne til legepladsen for skolens ledelse.

Tredimentionel model af skolegård - lavet af elever

3.7 Varieret og anvendelsesorienteret undervisning

En skoledag skal samlet set byde på varieret og anvendelsesorienteret undervisning med henblik på at øge elevernes alsidige udvikling, motivation og trivsel. I dette afsnit gives ideer til, hvordan den fagdelte matematikundervisning også kan fremstå varieret og anvendelsesorienteret.

Udgangspunktet for undervisningen i matematik er læringsmålene fra Fælles Mål. De undervisningsformer, læreren vælger i matematikundervisningen, skal derfor være meningsfulde i forhold til de færdigheder, den viden og de kompetencer, eleverne skal opnå i faget. For de fleste af målenes vedkommende har læreren mulighed for at vælge mellem eller inddrage mange forskellige undervisningsformer og dermed mulighed for at variere undervisningen. Det gælder fx for læringsmålet under regnestrategier i første fase på mellemtrinnet: ”Eleven kan udføre beregninger med de fire regningsarter inden for de naturlige tal, herunder beregninger vedrørende hverdagsøkonomi”. Undervisning, der er rettet mod et sådant mål i en 4. klasse, vil fx kunne formes som:

Værkstedsarbejde

Det kan fx tænkes, at klassens elever inddeles i fire grupper, der arbejder i hvert deres værksted. Hvert værksted er rammen omkring et sæt aktiviteter eller opgaver, der er forbundet med læringsmålet. I et værksted skal eleverne fx udarbejde regnehistorier ud fra forskellige regneudtryk. I et andet værksted skal eleverne opstille et budget i et regneark. I et tredje værksted spiller eleverne et spil, der kræver hovedregning, og i et fjerde værksted øver eleverne overslagsregning i forbindelse med (et fiktivt) indkøb. Undervisningen kan være planlagt sådan, at eleverne rokerer mellem værksteder, fx hver halve time, så de i løbet af nogle lektioner kommer igennem alle værkstederne. Det kan også tænkes, at hvert værksted er rammen om aktiviteter og opgaver, som har forskellige sværhedsgrader, og at hver elev ikke skal arbejde i alle værksteder. En af fordelene ved værkstedsarbejde kan være, at værkstederne kan organiseres sådan, at læreren ikke nødvendigvis skal hjælpe lige meget i hvert værksted. Det kan skabe differentieringsmuligheder, hvis læreren i en periode kan koncentrere sin i tid i et eller to af værkstederne.

Projektarbejde

Det kan fx tænkes, at undervisningen tager udgangspunkt i problemstillinger, der vedrører planlægningen af en kommende udflugt. Hvad har vi råd til på turen? Hvornår skal vi af sted, og hvornår kommer vi hjem? Hvordan finder vi vej, og hvor lang tid skal vi gå? Klassen kan i fællesskab lave en brainstorm over relevante spørgsmål og diskutere, hvordan de kan besvares. Efterfølgende kan arbejdet fordeles mellem nogle grupper, der til sidst præsenterer deres resultater. Arbejdet kan evalueres i fællesskab. En af fordelene ved denne undervisningsform er, at eleverne får gode muligheder for at arbejde ud fra egne interesser og forudsætninger.

Emnearbejde

Det kan fx tænkes, at undervisningen tager udgangspunkt i emnet ferietid, og at elever og lærer i fællesskab opstiller en række delemner, som kan indgå. Det kan fx være: penge i forskellige lande (valuta og priser), vejret i forskellige lande, tidszoner og rejselængder (tid og afstand). Eleverne kan i samarbejde med læreren indsamle og bearbejde oplysninger om de forskellige delemner. De færdige resultater fremlægges i klassen, og der evalueres på forløbet. På samme måde som ved projektarbejde kan denne undervisningsform give eleverne gode muligheder for at arbejde ud fra egne interesser og forudsætninger.

Opgaveløsning

Traditionelt set har især individuel opgaveløsning fyldt meget i matematikundervisningen – måske så meget, at matematik for mange elever fremstår som et fag, som netop går ud på at løse opgaver. En fordel ved opgaveløsning som undervisningsform kan være, at opgaverne kan give eleverne mulighed for at arbejde aktivt i deres eget tempo. Den type aktivitet, eleverne har i forbindelse med opgaveløsning, er imidlertid afhængig af opgavernes karakterer. En opgave kan være mere eller mindre kognitivt udfordrende, og den kan have forskellige grader af åbenhed og anvendelsesorientering. Set i forhold til princippet om undervisningsdifferentiering kan det i matematikundervisningen ofte være en fordel at vælge opgaver, som er åbne enten i de forskellige tilgange, eleverne kan have til opgaven, eller i de forskellige løsningsmuligheder, der kan være til den samme opgave. I forbindelse med det konkrete læringsmål kan et eksempel på en åben opgave være: Tasterne 1,3 og 5 er gået i stykker på din lommeregner. Kan du alligevel få den til at skrive 135? Hvordan? Skriv mange løsninger.

Undersøgelseslandskaber

Tidligere professor i matematikdidaktik, Ole Skovsmose, har indført begrebet undersøgelseslandskaber om undervisningssituationer, hvor eleverne tager imod en opfordring om at gennemføre en udforskning. Et undersøgelseslandskab kan fx tage udgangspunkt i en afgrænset kontekst eller i en situation, som læreren opfordrer eleverne til at undersøge. For at der skal blive tale om et undersøgelseslandskab, skal eleverne tage imod invitationen om udforskning og efterhånden selv stille undersøgelsesspørgsmål, sådan at det bliver elevernes forundring, der bliver styrende i undervisningen. Når det lykkes, kan undersøgelseslandskaber betragtes som en undervisningsform, der giver gode muligheder for differentiering og for at fokusere på aspekter ved helt centrale matematiske arbejdsmåder, herunder problemformulering, systematisering, hypotesedannelse, ræsonnement, matematisk kommunikation, abstraktion og generalisering. I forbindelse med det konkrete eksempel kan et undersøgelseslandskab fx udspringe af spørgsmål knyttet til en taltavle: Jeg har tegnet en firkant i taltavlen. Prøv at se på summen af de gule tal og summen af de røde tal i firkanten. Prøv at tegne en lignende firkant andre steder på taltavlen og beregn de tilsvarende summer. Hvad opdager I? Gælder det altid? Hvad hvis firkanten havde en anden størrelse? Hvis vi ganger tallene? Hvis vi ændrede firkanten til en anden form, fx et parallelogram? Hvad nu hvis …?

10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
9	19	29	39	49	59	69	79	89	99
8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
1	11	21	31	41	51	61	71	81	91

Klasseundervisning

Klassens samlede arbejde under lærerens styring giver gode muligheder for bl.a. dialoger, præsentationer og opsamlinger. Det er i klasseundervisningen, læreren har mulighed for at præsentere bl.a. forløb, aktiviteter og læringsmål, sådan at eleverne får mulighed for at målrette og se mening med deres arbejde i undervisningen. Igennem dialog kan bl.a. ideer, faglige forståelser og kritiske overvejelser udveksles, og læreren får mulighed for at guide elevernes deltagelse igennem sine svar og handlinger. Det er også i klasseundervisningen, at læreren får mulighed for at sammenfatte de resultater, forståelser og pointer, som eleverne har givet udtryk for, og forbinde disse med det, eleverne har lært tidligere. Det vil ofte være hensigtsmæssigt at bruge klasseundervisning i en variation med andre undervisningsformer, og i nogle tilfælde kan klasseundervisningen næsten ikke adskilles fra andre undervisningsformer – de filtrer sammen. Det gælder fx i et undersøgelseslandskab, hvor der kan være en vekslen mellem elevernes selvstændige aktivitet og klassens samlede dialog.

I en stor del af læringsmålene for matematik indgår ordet anvende. Det gælder fx læringsmålet under geometrisk tegning på mellemtrinnet, fase 2: ”Eleven kan anvende skitser og præcise tegninger”. Elevernes anvendelse kan generelt rette sig mod både teoretiske og praktiske sammenhænge. Det kan således tænkes, at det nævnte læringsmål nedbrydes til anvendelser både inden for faget, fx: ”Eleverne kan med brug af et geometriprogram tegne polygoner præcist ud fra givne oplysninger”, eller uden for matematik, fx: ”Eleverne kan tegne en præcis plantegning af et hus”. Når skolereformen 2014 fokuserer på anvendelsesorienterede undervisningsformer, sigtes der naturligvis på den form for anvendelse, som ligger uden for matematikken – altså på undervisning, som retter sig imod matematikkens anvendelse i fx hverdagssituationer, arbejdsliv- og samfundsliv.

Dette sigte harmonerer i høj grad med selve fagformålet for matematik og kan indgå i arbejdet med så godt som alle læringsmål i matematik – også selv om ordet anvende ikke indgår i formuleringen. Det gælder fx læringsmålet under sandsynlighed på mellemtrinnet, fase 2: ”Eleven kan undersøge chancestørrelser ved simulering af chanceeksperimenter”. I den forbindelse kan eleverne fx undersøge sandsynligheden for, at tre søskende alle er drenge – altså et spørgsmål, der rækker uden for matematikken.

3.8 Bevægelse

Motion og bevægelse kan både indgå i den fagopdelte undervisning og i den understøttende undervisning. I matematik kan især øvelser af enkle færdigheder inden for talbehandling foregå i tilknytning til elevernes motion og bevægelse. Der kan fx arrangeres stafetløb, hvor der undervejs i løbet skal løses en opgave, fluesmækkerløb, hvor resultatet af et regnestykke skal smækkes med en fluesmækker, eller svampekast, hvor eleverne kaster våde svampe mod en målskive tegnet på en kridttavle og efterfølgende beregner deres samlede pointsum. Mulighederne for denne type øvelser er talrige, og inspiration kan let findes på bl.a. internettet.

Anvendelser, undersøgelser og dataindsamlinger er andre elementer af matematikfaget, som kan skabe mulighed for elevernes fysiske bevægelse. Anvendelsen kan fx vedrøre opmålinger i de lokale omgivelser. Hvor langt er der mon rundt om skolen? Lad os gætte og prøve efter. Hvordan kan vi måle, hvor langt der er? Hvor høj er byens højeste bygning? Lad os gætte og prøve efter. Hvordan kan vi finde ud af, hvor høj den er? Er der flere måder? Der skal asfalteres på skolens parkeringsplads. Hvor meget asfalt får vi mon brug for? Hvordan kan vi finde ud af det?

Undersøgelserne kan fx vedrøre naturfaglige elementer, som kan behandles matematisk. Er det fx muligt at skabe ligevægt på en vippe med to børn på den ene side af vippen og et barn på den anden side af vippen, hvis de alle tre vejer ca. lige meget? Hvordan skal børnene sidde, for at det kan lade sig gøre? Hvad med tre børn? Er der et system? Kan en gynge med to børn gynge i takt med en gynge med et barn, hvis de tre børn vejer lige meget? Hvad hvis den ene gynge er kortere end den anden? Med hvilken vinkel skal du kaste en bold for at kaste længst?

Dataindsamlinger kan fx vedrøre trafik, fart eller sport. Hvor meget trafik er der på vores skolevej? Hvor hurtigt kører bilerne? Hvor hurtigt kan I køre på en cykel? Hvordan er sammenhængen mellem farten og bremselængden på en cykel? Er det sådan, at jo højere I er, jo højere springer I højdespring? Hvad med længdespring?

Det er oplagt, at eleverne ikke lærer matematik af at bevæge sig, men i forbindelse med de førstnævnte eksempler kan bevægelsen give mange elever mulighed for at øve sig på simple færdigheder i sammenhænge, som de finder meningsfulde frem for ensidige øvelser i en bog, fordi de indgår i en leg eller i et spil. I forbindelse med de sidstnævnte eksempler kan bevægelsen give mange elever mulighed for at få matematikken forbundet med konkrete og meningsfulde erfaringer.

3.9 Den åbne skole

Skolerne skal i højere grad end tidligere åbne sig over for det omgivende samfund ved at inddrage bl.a. det lokale idræts-, kultur- og foreningsliv i skolelivet. For matematiks vedkommende kan den åbne skole evt. bidrage til, at eleverne opnår indsigt i, hvordan matematikken konkret anvendes i dele af arbejds-, erhvervs- og samfundsliv. Måske er der mulighed for at besøge lokale håndværkere og bl.a. få dem til at fortælle om deres praktiske anvendelse af matematik? Hvad er det vigtigt at kunne af matematik for en tømrer? For en murer? Og hvordan anvender disse håndværkere matematik i praksis til opmålinger, beregninger, blandinger m.m.? Hvilken rolle spiller matematik for en forretningsindehaver? For en sygeplejerske, en landmåler, en arkitekt eller en statistiker?

I flere af læringsmålene for området regnestrategier nævnes privatøkonomi. Måske kan den åbne skole give mulighed for et besøg i den lokale bank eller sparekasse for at lære mere om privatøkonomi af rådgivere, der beskæftiger sig med det til daglig? Hvordan lægges et privat budget? Hvad koster det at låne penge? Og hvordan kan det bedst betale sig at spare op? En anden mulighed kan være et besøg på den lokale skatteforvaltning. Hvad skal vi betale i skat? Og hvad bruges pengene til?

De aktiviteter, der indgår i forbindelse med den åbne skole, skal på den ene side bidrage til at fremme sammenhængskraften i det lokale samfund og hjælpe eleverne til at opnå kendskab til de muligheder, der er i det. På den anden side skal de understøtte det, eleverne skal lære i skolen, altså læringsmålene for bl.a. matematik.

3.10 Den understøttende undervisning

I dette afsnit findes eksempler på indhold i understøttende undervisning, der på forskellige måder kan bidrage til elevernes matematiklæring.

Den understøttende undervisning kan fx bidrage ved at give eleverne erfaringer, som matematiklæreren efterfølgende kan bygge på i den fagdelte matematikundervisning. For eleverne på mellemtrinnet kan det fx dreje sig om at opbygge erfaringer med tilfældighed og chance gennem terningspil eller kortspil. Hvor mange gange skal man egentlig slå med en terning, før man får lov til at rykke sin brik ud i et spil ludo? Hvilken taktik kan det bedst betale sig at bruge i kortspillet Halv tolv? I den understøttende undervisning kan spørgsmålene stilles og erfaringerne gøres, fx ved at der spilles og indsamles data. I den efterfølgende matematikundervisningen kan læreren og eleverne inddrage disse erfaringer, når fokus rettes på hvorfor?

Erfaringsdannelse fra den understøttende undervisning kan fx vedrøre:

- Tegning (Hvordan kan bygninger i skolens nærområde tegnes, så de ser rigtige ud?)
- Byggevejledninger (Opfind en Lego-figur og tegn en byggevejledning til den)
- Fart (Hvor hurtigt kan du køre på din cykel?)

- Sport (Hvad er den bedste kastevinkel?)
- Vækst (Hvor hurtigt vokser en plante?)
- Overslagsberegninger (Hvor mange fisk er der mon i søen?).

Den understøttende undervisning kan også bidrage ved at give eleverne mulighed for at anvende matematik på andre måder, end de kan i matematiklokalet. Eleverne kan fx anvende matematik i små byggeprojekter. Hvordan skal byggevejledningen til fuglehuset læses? Hvor meget træ skal vi bruge? Hvad koster det? Hvordan skal vi måle op? Hvor stort et bor skal vi bruge til at bore hullet? Hvilken vinkel skal vi save i? Det kan tænkes, at der hos eleverne i forbindelse med anvendelsen af matematik i sådanne projekter opstår både ny indsigt og nye spørgsmål, som kan bringes tilbage i matematikundervisningen.

Anvendelsen af matematik i den understøttende undervisning kan fx vedrøre:

- Bagning (Hvordan skal jeg læse og følge opskriften?)
- Håndarbejde (Hvordan skal jeg læse og følge opskriften?)
- Planlægning af ture (Hvornår skal vi af sted, hvis …?)
- Indkøb (Har vi penge nok til …?).

Den understøttende undervisning kan desuden bidrage ved at give eleverne mulighed for at øve og automatisere simple færdigheder i meningsfulde sammenhænge. Eleverne på de mindre klassetrin kan igennem lege bl.a. få mulighed for at øve tælleremser: Når vi sjipper, tæller vi 10, 20, 30, … eller 2, 4, 6, 8, … Når vi hinker, tæller vi baglæns. Ofte giver spillignende aktiviteter også mulighed for at automatisere beregninger. Det kan fx dreje sig om:

- Kortspil (fx kasino)
- Terningspil (fx Yatzy)
- Dart
- Bowling.

Den understøttende undervisning er ikke omfattet af holddannelsesreglerne og kan bl.a. anvendes til at danne hold, evt. på tværs af klasser, som giver mulighed for, at de elever, der har brug for det, får særlig opmærksomhed – også når fokus er på et fagrelateret indhold.

4. Kompetenceområder i matematik

Faget består af fire kompetence- og stofområder:

1. Matematiske kompetencer
2. Tal og algebra
3. Geometri og måling
4. Statistik og sandsynlighed

I afsnittet uddybes kompetence- og stofområderne, og der gives eksempler på, hvordan der kan arbejdes med kompetence- og stofområderne i undervisningen.

4.1 Matematiske kompetencer

At beskrive matematisk faglighed uden brug af den traditionelle pensumtænkning kom for alvor ind i den fagligdidaktiske tænkning i 2002, da der i Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie udkom en rapport, der forsøgte at beskrive matematisk faglighed ved hjælp af kompetencebegrebet. Rapporten hed Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark, i daglig tale kaldet KOM-rapporten.

For at forenkle er de otte kompetencer i KOM-rapporten sammenskrevet til seks Forenklede Fælles Mål, idet ræsonnement og tankegangskompetence beskrives sammen, ligesom det gælder for repræsentation og symbolbehandlingskompetence.

Det er ideen, at arbejdet med kompetencerne og med de faglige emner er vævet tæt sammen, jf. figur 1, så eleverne, mens de lærer om fx brøker, bliver dygtige til fx at løse problemer, ræsonnere og repræsentere brøker og regning med brøker på mange forskellige måder.

Problembehandling

Problembehandlingskompetence handler om at kunne opstille og løse matematiske problemer. Et matematisk problem er i denne forbindelse et problem, som ikke kan løses med rutineprægede færdigheder, men kræver en undersøgende virksomhed. Hvad der er et matematisk problem for én elev, er det således ikke nødvendigvis for en anden.

Udviklingen af problembehandlingskompetence starter i indskolingen med, at eleverne arbejder med at løse enkle matematiske problemer, som de ikke umiddelbart har rutineprægede redskaber til at løse, og derved opnår erfaringer med at arbejde undersøgende. På mellemtrinnet arbejdes der med mere komplekse problemstillinger i forskelligartede sammenhænge, så eleverne efterhånden tilegner sig forskellige strategier til løsning. På de ældste klassetrin lærer eleverne selv at tilrettelægge, strukturere og vurdere større problemløsningsprocesser.

Modellering

En matematisk model er en matematisk beskrivelse af virkeligheden, og matematisk modelleringskompetence handler derfor om at kunne opstille matematiske modeller af virkeligheden samt kunne analysere og fortolke foreliggende modeller.

I indskolingen arbejder eleverne med simple hverdagssituationer, som kan beskrives ved hjælp af matematik, bl.a. ved at oversætte begge veje mellem virkelighed og matematik. På mellemtrinnet arbejdes der i højere grad med hele modelleringsprocesser, herunder specielt sammenhængen mellem matematik og virkelighed. I udskolingen arbejder eleverne med de enkelte delelementer i modelleringsprocessen fra afgrænsning af problemstilling fra virkeligheden til matematisering, matematisk analyse, oversættelse af det matematiske resultat til virkelighedssituationen og validering. Eleverne skal desuden arbejde med at identificere, analysere og kritisk vurdere anvendelsen af matematiske modeller i det omgivende samfund.

Ræsonnement og tankegang

Ræsonnement og tankegangskompetence handler om at stille, genkende og besvare spørgsmål, som er karakteristiske for matematik, samt at kunne opstille og følge matematiske ræsonnementer. Matematik er opbygget af forudsætninger, definitioner, sætninger og ræsonnementer, som tilsammen danner et matematisk sprog.

I indskolingen skal eleverne stifte bekendtskab med kendetegnene ved det matematiske sprog gennem arbejde med enkle matematiske spørgsmål, svar og forklaringer. På mellemtrinnet arbejdes der med enkle matematiske ræsonnementer ud fra hypoteser, som eleverne selv formulerer ud fra fx undersøgende arbejde. I udskolingen arbejdes med afgrænsning mellem de enkelte delelementer som fx definitioner og sætninger samt enkle matematiske beviser, fx i geometri. Der er fokus på opbygningen af matematisk teori med forudsætninger, definitioner, sætninger og beviser frem for gennemførelse af mere komplicerede beviser.

Repræsentation og symbolbehandling

Mange matematiske begreber og sammenhænge kan beskrives med forskellige repræsentationer. En funktion kan fx beskrives med en graf, en forskrift, en tabel eller en sproglig beskrivelse. I matematik er brugen af symboler en specielt vigtig repræsentation. Repræsentation og symbolbehandlingskompetence handler om at kende og kunne betjene sig af forskellige repræsentationsformer, at kunne vurdere og derudfra vælge relevant repræsentationsform i en given sammenhæng samt at kunne oversætte mellem forskellige repræsentationsformer. Specielt er afkodning og brug af matematisk symbolsprog et centralt delelement i denne kompetence.

I indskolingen arbejdes der især med konkrete og visuelle samt enkle symbolske repræsentationer. På mellemtrinnet arbejdes der især med sammenhængen mellem hverdagssprog og det matematiske symbolsprog. I udskolingen fokuseres der på brugen af mere avanceret matematisk symbolsprog, specielt brugen af variable, og eleverne vurderer og vælger repræsentationsform ud fra situationen.

Kommunikation

Kommunikationskompetence handler om at kunne udtrykke sig og forstå andres kommunikation om matematikholdige emner, herunder mundtlige, skriftlige og visuelle kommunikationsformer.

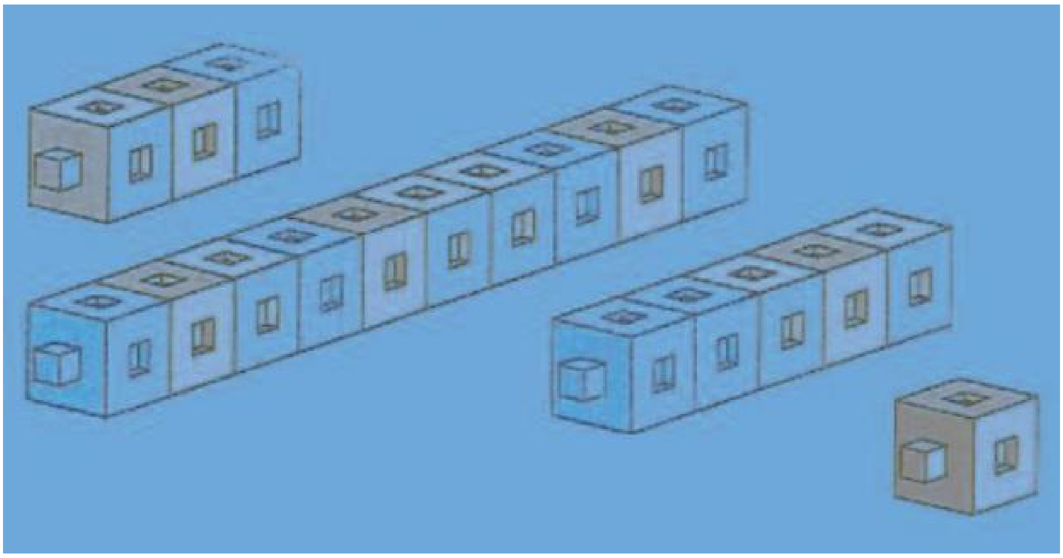
I indskolingen er der specielt fokus på mundtlige og visuelle kommunikationsformer med brug af enkle fagord og begreber. På mellemtrinnet kommer der fokus på skriftsproget også, og eleverne arbejder med at forstå og udtrykke sig med et mere præcist fagsprog. I udskolingen øges denne grad af præcision yderligere, samtidig med at der kommer øget fokus på brugen af det matematiske fagsprogs begreber og notation, såvel skriftligt som mundtlig.

Hjælpemidler

Hjælpemiddelkompetence handler om at have kendskab til og kunne anvende forskellige hjælpemidler samt at kunne vælge et relevant hjælpemiddel til arbejdet med en given matematisk problemstilling. Hjælpemidler indbefatter både digitale hjælpemidler og mere traditionelle matematiske værktøjer som kugleramme, passer, vinkelmåler og lineal og konkrete materialer som centicubes, cuisenaire-stænger og geobrikker.

I indskolingen arbejdes der med at anvende, vurdere og vælge konkrete materialer og digitale hjælpemidler som hjælpemiddel til beregninger, undersøgelser og tegning. På mellemtrinnet arbejdes der med større faglig præcision i forbindelse med arbejdet med hjælpemidler, og eleverne vælger i højere grad hjælpemiddel ud fra en konkret vurdering af sammenhængen. I udskolingen anvender og vurderer eleverne forskellige hjælpemidler til den samme problemstilling og tager derudfra stilling til muligheder og begrænsninger ved brugen af forskellige hjælpemidler.

Et eksempel: Overfladen af stænger



Lav en stang af 5 centicubes. Hvor stor er overfladen?

• Hvor stor er overfladen af en stang lavet af 10 centicubes?

• Hvor stor er overfladen af en stang lavet af n centicubes?

Om selve opgaven – stofområder og matematiske kompetencer

Opgaven handler om flere ting på én gang. Helt overordnet er der et problem, der skal løses: Hvordan finder man arealet af overfladen på centicube-stænger af forskellig længde? Rent geometrisk handler opgaven om overfladen af en stang. Hvad betyder overflade? Hvor stor er overfladen? Hvordan finder man den? Kan der laves en regel? Samtidig handler opgaven om at arbejde undersøgende, systematiserende og ræsonnerende. Og hvis man kaster sig ud i at finde overfladen af mange centicube-stænger, er det oplagt at finde en regel for, hvordan man finder overfladen. Nu handler opgaven altså også om at generalisere. Desuden er det oplagt at inddrage symbolbehandling, når man har fundet en regel.

Eksempler på læringsmål

Eksempler på læringsmål inden for geometri kunne være:

· Eleverne har viden om, hvad overfladen af en rumlig figur er.

· Eleverne kan bestemme overfladen af et kasseformet polyeder.

· Eleverne kan formulere en generel regel for, hvordan man beregner overfladearealet.

Eksempler på læringsmål inden for matematiske kompetencer kunne være:

· Eleverne kender typer af spørgsmål, der er relevante at stille, fx: Hvad vokser overfladen med, når stangen bliver 1 centicube større? Hvis overfladen på en centicube er 6, hvorfor er den så ikke 12, når stangen er på 2 centicubes?
(Ræsonnement og tankegangskompetence)

· Eleverne kan finde metoder til at gå i gang med at løse problemet, fx ved at give sig til at tælle og skrive resultatet systematisk op i en tabel, samt ved at systematisere og generalisere: Den vokser med 4 hver gang og begynder med 6.
(Problembehandlingskompetence)

· Eleverne kan oversætte fra hverdagssprog til symbolsprog, fx: Stangen på 5 centicubes har jo 5 mavebælter på 4 hver og så 1 i hver ende. Det bliver 5 · 4 + 2. Stangen af n centicubes må altså have en overflade på n · 4 + 2.
(Repræsentation og symbolbehandlingskompetence)

· Eleverne kan ræsonnere ud fra konkrete repræsentationer og erfaringer, fx: Overfladen er 6 på hver af klodserne, så hvis der er n klodser, skulle overfladen være 6n. Men der forsvinder jo 2 overflader, hver gang 2 centicubes sættes sammen, og det sker (n – 1) gange, så det bliver 6n – (n – 1) · 2.
(Ræsonnement og tankegangskompetence)

· Eleverne kan beskrive forbindelsen mellem forskellige repræsentationer og oversætte imellem dem, fx:

$O = 4n + 2$

$O = 6n - (n - 1) \cdot 2$

Begynd med 6 og læg 4 til hver gang.

Antal centicubes	1	2	3	4	5	6
Overflade	6	10	14	18	22	26

(Repræsentation og symbolbehandlingskompetence)

4.2 Tal og algebra

Omdrejningspunktet for arbejdet med tal og algebra i indskolingen er elevernes udvikling af metoder til beregninger med naturlige tal. Sidst i forløbet inddrages dog også enkle brøker og decimaltal fra hverdagssituationer. På mellemtrinnet udvides talområdet til at omfatte rationale tal, og der fokuseres bl.a. på variabelbegrebet i tilknytning til ligninger, formler og beskrivelse af sammenhænge. Sidst i skoleforløbet omfatter talområdet også irrationale tal, og arbejdet med algebra omfatter også funktioner. Eleverne skal blive i stand til at anvende de reelle tal og algebraiske udtryk i både praktiske og teoretiske sammenhænge.

Brudstykker af talarbejdet på de yngste klassetrin

Elevernes udvikling af metoder til antalsbestemmelse på de yngste klassetrin kan finde sted i en undervisning, hvor deres færdigheder og viden inden for de tre områder tal, regnestrategier og algebra får mulighed for at spille sammen. Dette afsnit skal illustrere et sådant samspil.

I 1. klasse kan undervisning med hovedfokus på regnestrategier bl.a. bygge på problemstillinger (regnehistorier), som læreren formulerer mundtligt.

Eksempel: Albert har 7 kroner. Han får 10 kroner mere. Hvor mange penge har han nu?

Nogle elever i en 1. klasse klarer denne opgave ved at bruge tællematerialer, fx centicubes, til at repræsentere 1 krone. De tæller 7 centicubes op og lægger dem i en bunke. Derefter tæller de 10 centicubes op i en anden bunke, hvorefter de tæller alle centicubes. Denne strategi, hvor eleverne bruger tællematerialer til at repræsentere de ting, de tæller, kaldes i nogle sammenhænge direkte modellering og er samtidig et eksempel på en tæl-alle-strategi.

Andre elever i klassen bruger direkte modellering sammen med en tæl-videre-strategi. De er kommet et skridt videre i deres faglige udvikling og tæller videre fra 7, fordi de enten på egen hånd eller med støtte har opdaget, at de ikke behøver at tælle tingene i den første mængde. Et typisk næste skridt er, at eleverne tæller videre fra den største addend – altså i dette eksempel fra 10. Det forudsætter, at eleverne har indset, at addendernes orden er ligegyldig.

I eksemplerne udvikler eleverne gradvist færdigheder og viden om addition på grundlag af tællestrategier (i modsætning til udenadslære). Efterhånden kan eleverne i kraft af den viden, de opbygger igennem undervisningen, inddrage faktaviden i deres regnestrategier. Det kan fx tænkes, at en elev løser opgaven i eksemplet med hovedregning ved at tænke: Jeg ved, at 10 plus 5 er 15. Så skal jeg bare tage 2 mere. Det bliver 17. Eleven bruger en regnestrategi, der bygger på udledte talfakta.

Senere i indskolingsforløbet kan problemstillingen udvides, så den i højere grad sigter på algebraisk tænkning:

Albert har 7 kroner. Hver uge får han 10 kroner. mere. Efter 1 uge har han 17 kroner. Hvor mange penge har han efter 2 uger, 3 uger, …?

Eleverne kan ved hjælp af deres forskellige regnestrategier og evt. lærerens støtte udarbejde lister, der viser Alberts opsparing, fx 7, 17, 27, 37, 47, …

Læreren spørger, hvordan det mon fortsætter, og lægger på den måde op til, at eleverne leder efter et mønster i talfølgen.

Et svar kunne være: Det bagerste tal bliver ved med at være 7, men det forreste tal bliver hele tiden større … 1, 2, 3, 4, …

Læreren griber chancen til at introducere en tabel, der viser antal uger og antal kroner:

Uger	1	2	3	4	5	6
Kroner	17	27	37	47		

Hvor mange penge har Albert mon så efter 5 uger? 6 uger?

Eleverne får på den måde dels mulighed for at opdage nogle generelle træk ved regneoperationen +10, dels får de mulighed for at opdage endnu en sammenhæng, nemlig sammenhængen mellem antal uger og antal kroner.

Endnu senere i indskolingsforløbet kan det tænkes, at indsigten vedrørende regneoperationen +10 indgår i elevernes udvikling af metoder til addition med flercifrede tal. For nogle elever kan beregningen af 48+34 foregå ved optællingen: 48, 58, 68, 78, 79, 80, 81, 82, når de støtter sig til tællemateriale, tallinje eller taltavle. Andre elever trækker på en anden indsigt, de har udviklet igennem undervisningen, nemlig at tallene kan opdeles i tiere og enere. Deres forklaring kan evt. lyde sådan: Der er 4+3 tiere. Det er 7 tiere. Og der er 8+4 enere. Det er 12 enere. Så er der 70+12=82. Endelig kan det tænkes, at nogle elever benytter sig af strategien omgruppering: 48+34. Hvis jeg lægger 2 til 48, får jeg 50. Så kan jeg trække 2 fra 34. Så får jeg 32. 48+34 må give det samme som 50+32. Det bliver 82.

Det er hensigten med læringsmålene under tal og algebra på de yngste klassetrin, at eleverne som skitseret bl.a. får mulighed for gradvist at udvikle og forfine deres foreløbige og intuitive talforståelser og regnestrategier. Læreren spiller i den forbindelse en stor rolle med løbende at understøtte både de enkelte elevers læring og klassens fælles læringsspor, bl.a. ved at fremhæve metoder og forståelser, der bygger på indsigt i titalssystemet og i egenskaber ved de naturlige tal.

Brudstykker af arbejdet med algebra på mellemtrinnet og i udskolingen

For eleverne skal algebra blive til et sprog, som de kan læse og forstå i forbindelse med formler og anvende i forbindelse med beskrivelse af generaliseringer og sammenhænge. Det skal blive til et redskab, der kan bruges til løsning af praktiske og teoretiske problemer.

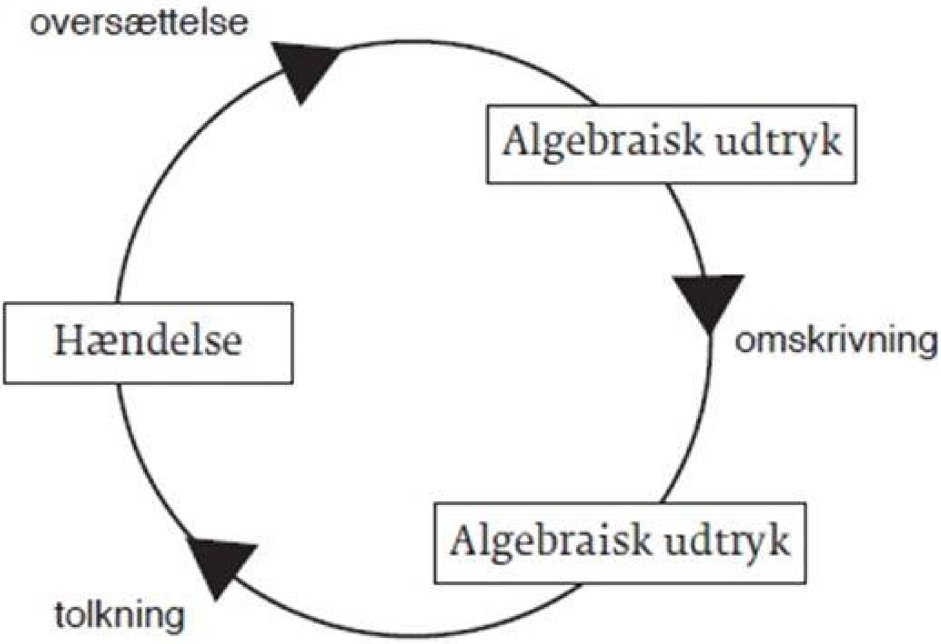
Det er derfor ikke tilstrækkeligt at kunne rykke rundt på symbolerne ved at følge nogle bestemte regneregler. Arbejdet med algebra kan ikke ses som isolerede øvelser i bogstavregning. På den anden side bliver algebra ikke til et anvendeligt sprog eller et brugbart redskab, hvis man ikke kan omskrive symboludtryk.

Arbejdet med algebra kan ses som cirkulært. Arbejdet består af faser med:

· oversættelse af en hændelse eller en problemstilling til et algebraisk udtryk

· omskrivning af symboludtryk

· tolkning af symboludtryk (der igen knyttes til hændelsen eller problemstillingen).



Algebraisk cyklus

Det er altså nødvendigt at kunne håndtere alle faser af den algebraiske cyklus, hvis algebra skal blive et brugbart sprog og redskab.

Eksempel: Flaskeaflevering

Dette eksempel tager udgangspunkt i, at de fleste børn på mellemtrinnet har erfaring med at få udbetalt pant, når de afleverer flasker i en flaskeautomat. Eleverne kan blive præsenteret for et fotografi af en flaskeautomat med en oversigt over de forskellige typer pant, fx:

Lille flaske: 1,00 krone.

Mellemstor flaske: 1,50 kroner.

Stor flaske: 3,00 kroner.

Der kan formuleres en række opgaver til elever på mellemtrinnet med udgangspunkt i flaskeafleveringen:

· Hvor mange penge gives fx for 3 store flasker? For 4? For 10? For 100?

Hvis opgaverne skal medføre algebraisk tænkning, kræver det, at de sigter på at generalisere. Over for elever på mellemtrinnet kan det være en ide at få dem til at forklare en generel fremgangsmåde for en kammerat:

· Hvordan vil du forklare en kammerat, hvor mange penge man får for en posefuld af de store flasker?

· Kan du skrive en fremgangsmåde, din kammerat kan bruge?

· På matematiksprog bruges der ofte et bogstav for et ukendt antal. Hvor mange penge tjener man på et eller andet antal flasker? På a flasker?

Opgaverne kan også (senere) komme til at medføre sammenligning af regneudtryk:

· Hvilke af regneudtrykkene herunder fortæller fx, hvor mange penge du får for 4 store flasker og 4 små flasker? Hvorfor?

3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1
4 · 3 + 4 · 1
4 · (3 + 1)
12 + 4

Hvordan ville du selv beregne, hvor mange penge du får for 4 store flasker og 4 små flasker?

På de større klassetrin kan opgaverne komme til at omfatte algebraiske udtryk.

Hvilke af regneudtrykkene herunder fortæller fx, hvor mange penge du tjener på a store flasker og a små flasker? Hvorfor?

· a · 3 + a · 1

· a · (3 + 1)

· 4a

Der kan også stilles opgaver, som vedrører ligningsløsning. Fx: Min kammerat afleverede 15 store og mellemstore flasker i automaten. Han fik 36 kroner for dem, men han kan ikke huske, hvor mange der var af hver slags. Kan du hjælpe?

Eleverne kan selv formulere flere opgaver til deres klassekammerater med forskellige sværhedsgrader ud fra ideen med flaskeaflevering.

Eleverne får mulighed for at arbejde med forskellige sider af algebraen i udfoldningen af opgaver omkring en flaskeautomat, og de får mulighed for at benytte kendt sprog i overgangen til matematikkens sprog.

Eksempel: Formler og ligninger i overbygningen

Et eksempel på, hvordan eleverne kan arbejde med at skabe sig personlig viden i arbejdet med formler og ligninger, kunne være følgende, hentet fra en 8. klasse:

Eleverne har i de foregående år arbejdet med anvendelse af variable i mange sammenhænge, hvor der har været vekslet mellem beskrivelser i ord og ved hjælp af symboler, fx sammensat til ligninger.

Erfaringer viser, at det er et stort spring at foretage for eleverne, når de skal til at håndtere algebraiske udtryk i form af ligninger. Det generer eleverne, at de oplever, at der ikke er en bestemt metode, der altid er den mest hensigtsmæssige at benytte.

Efter en generel indledende samtale om ligninger bliver der taget hul på det mere tekniske arbejde med løsning af ligninger. Eleverne går uden nærmere angivelser af metoder i gang med selvstændigt at løse ligninger af forskellige typer, som antydet i dette uddrag:

I løbet af en lektion løser eleverne mellem 10 og 26 opgaver.

Metoderne, der bliver anvendt, er vidt forskellige. Men typisk bliver ligningerne løst baglæns.

Fx opgave 5:

Hvis (5x – 2) skal være 8, $5x - 2 = 8$
så skal 5x være 10.
Det kunne skrives sådan: $5x = 10$

Hvis man så i øvrigt var klar over,
at 5x var det samme som $5 \cdot x$,
så var det let at se,
at løsningen var: $x = 2$

I nogle opgaver skal der reduceres først. Men så kan også de løses ved overvejelser og tilbagegående regning.

Selv opgaver af denne type kan klares:

$$17y + 8 - 2y = 30 + 4y$$

Først bliver der reduceret: $15y + 8 = 30 + 4y$

Herefter bliver der ræsonneret til, fx at
15y og 4y på hver sin side af =
må kunne reduceres til: $11y + 8 = 30$

Hvorefter typen ligner de foregående.

Ved at bygge på forhåndskendskabet til variabelbegreb og regneregler kommer eleverne langt i det tekniske arbejde med løsning af ligninger. Da de ikke har fået præsenteret en bestemt metode, er de nødsaget til at se på den samlede symbolsammenstilling, benytte ræsonnementer, fejle og prøve igen. Dette skal ses i modsætning til et forløb, hvor nogle ligningsløsningsregler bliver præsenteret; lægge lige meget til på begge sider af lighedstegnet, flytte over på den anden side af lighedstegnet mv.

Ved den benyttede fremgangsmåde er eleverne selv med til at finde frem til metoder og regler. De er med til at opbygge deres matematiske kunnen og viden, og de får en grundlæggende metode at vende tilbage til.

Nogle elever kan med fordel fortsætte med at benytte inspektionsmetoden, hvor de gætter på et tal, som indsættes for den variable: Herefter regnes udtrykket ud for at se, om tallet er en løsning. Er tallet ikke en løsning, fortsættes med nye gæt og efterprøvninger, indtil et resultat er nået.

På et senere tidspunkt må elever og lærer drøfte betydningen af at kunne løse ligninger efter de sædvanligt anvendte metoder. Der må tages stilling til, hvilke færdigheder i ligningsløsning de forskellige elever har behov for at tilegne sig.

Herunder må også grafiske metoder i koordinatsystemet inddrages. Fx kan løsning af ligningssystemet bestemmes ved at tegne grafiske billeder og aflæse skæringspunkters koordinater. Eksperimenterende arbejde i et computerprogram til tegning af grafer kan også give indsigt i ligningsbegrebet.

4.3 Geometri og måling

På de yngste klassetrin fokuseres på, at eleverne udvikler deres forestillinger og viden om former, størrelser og beliggenhed sådan, at de gradvist bliver bedre til at anvende geometriske begreber og til at måle længder samt (senere) areal. Arbejdet tager udgangspunkt i elevernes erfaringsverden. På mellemtrinnet kan undervisningen gradvist tage udgangspunkt længere væk fra elevernes nære verden, når fokus rettes på deres anvendelse af geometriske metoder til fx tegning og angivelse af placering samt beregninger af enkle mål vedrørende længder, areal og rumfang. I undervisningen på overbygningen lægges gradvist mere vægt på undersøgelser og forklaringer på geometriske sammenhænge samt på metoder til beregninger af mål.

Brudstykker fra den indledende undervisning i geometri og måling

Det er et grundlæggende træk ved læseplanen, at geometrien tager udgangspunkt i elevernes forestillinger om og beskrivelse af den omgivende verden. Herved kan arbejdet med geometrien – på samme måde som arbejdet med tallene – tage udgangspunkt i børnenes hverdagserfaringer.

I de første år arbejdes der med fysiske objekter, som gøres til genstand for manipulation, iagttagelse og drøftelse. Erfaringerne med de geometriske former og figurers størrelse kan med fordel underbygges ved at lade eleverne bygge rumlige modeller og lave figurer på et sømbræt eller i et dynamisk geometriprogram på computeren. Det kan være figurer, der ligner et eller andet, eller det kan være figurer, som skal opfylde bestemte betingelser: Kan du lave en firkant, som er dobbelt så stor som denne her? Herved kan eleverne opdage, at dobbelt så stor kan have flere betydninger: Dobbelt så lange sider eller dobbelt så stor en flade. Det er lærerens opgave at give eleverne mulighed for at opdage og indse sådanne forskelle. Herved kan eleverne indse behovet for at udtrykke sig mere præcist.

Eksempler på aktiviteter i første forløb kan være:

- Tegn den rute, du går til skole.
- Byg en model af dit værelse.
- Tegn det hus, du bor i.
- Find mønstre i dine omgivelser og tegn et af dem.

I dialogen kan indgå spørgsmål som:

- Hvad fortæller din tegning?
- Kan du se på tegningen, hvor langt du har til skole?
- Hvordan kan du finde ud af, hvor langt der er i virkeligheden?
- Vinduet i dit værelse er firkantet. Er der andre firkantede ting på værelset?
- Hvilke andre former har tingene på dit værelse?
- Kan du gøre din tegning dobbelt så stor?
- Hvorfor er dit mønster symmetrisk?

Eleverne arbejder med ordning af ting efter form, størrelse og andre egenskaber, og gennem arbejdet med rumlige figurer får de mulighed for at videreudvikle deres rumlige fornemmelse.

Indledende aktiviteter med måling af afstand, flade, rum og vægt med ikke-standardiserede og standardiserede enheder er vigtige aktiviteter i den indledende geometriundervisning. Disse aktiviteter er det konkrete udgangspunkt for et senere arbejde med måling og beregning af længder, areal og rumfang.

Geometrien rummer mange muligheder for undersøgelser og eksperimenter. Undersøgelserne vil typisk rumme mulighed for problemløsning, fx:

- Hvor mange forskellige trekanter kan du lave på et 3 x 3 sømbræt? Hvor mange firkanter?
- Hvor mange forskellige figurer kan du bygge med 3, 4 eller 5 centicubes?
- Kan du bygge en figur, der vejer dobbelt så meget som …? Kan figuren være en kasse?

Undersøgelserne rummer ligeledes mulighed for kommunikation, fx:

- Forklar, hvorfor du mener, disse to trekanter er ens.
- Forklar, hvorfor denne figur er et rektangel.

Undersøgelserne vil ofte være ledsaget af spørgsmål, fx:

- Hvordan går det, hvis …?
- Mon det går sådan, fordi …?

Udvikling af metoder til beregning af areal

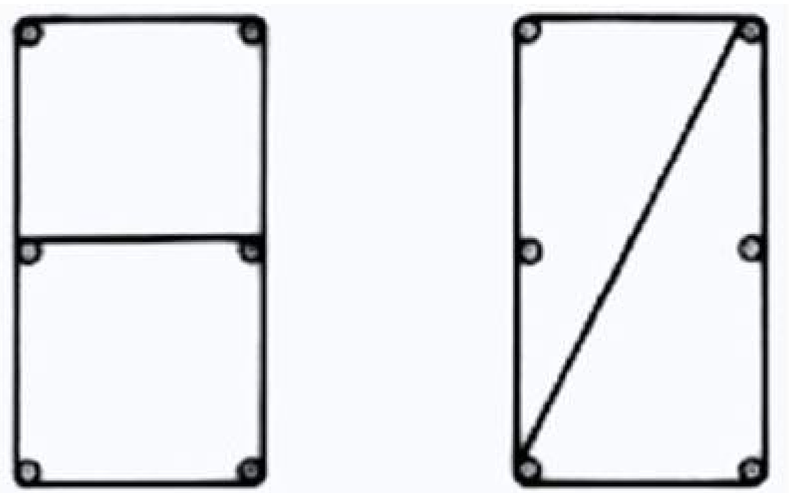
Området er præget af formler. Der er mange, og de kan slås op, men det er afgørende for elevernes forståelse af, hvad formler betyder, at de kommer igennem nogle fundamentale erkendelsesprocesser.

Det begynder hos de yngste elever:

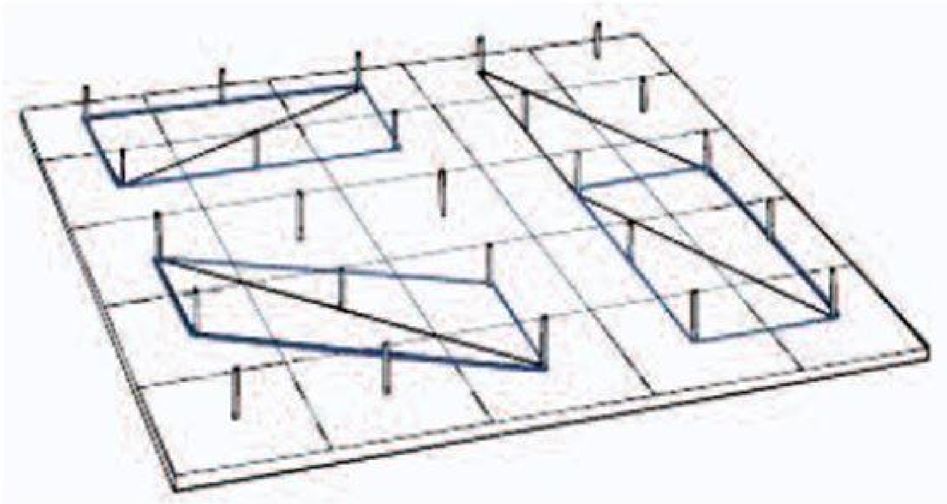
- Ved at lægge to helt ens trekanter ved siden af hinanden, kan man altid få en firkant.
- Ved at lægge kvadratiske brikker på en rektangulær flade, som kan dækkes helt af brikkerne, kan man finde et tal, der beskriver størrelsen af fladen.

Det skal prøves mange gange og mødes i mange sammenhænge.

Eleverne opdager, at rektangler er figurer, der direkte kan måles (med kvadrat som måleenhed), og at antallet af arealenheder kan bestemmes ved multiplikation. De fleste andre figurers størrelsesbeskrivelse kan kun forstås ved ræsonnementer.



I dette tilfælde kan eleven se, at den venstre figur er 2 stor, fordi den består af to arealenheder. Trekantens størrelse på den anden figur kan gennem ræsonnement indses at være 1. Enten fordi den er halvdelen af 2, eller fordi trekanten deles op, og delene flyttes rundt, så der dannes et kvadrat, som er 1. Nogle elever kan meget tidligt foretage denne tænkning og sætte ord på.



På tegningen herover er vist en række figurer på sømbræt. De er samlet til denne lejlighed – ikke til en samlet undervisningssituation. Men figurerne viser netop elevernes mulighed for at udvikle metoder til størrelsesbeskrivelse
af plane figurer:

· Retvinklede trekanter er altid halvdelen af et rektangel.

· Parallelogrammer kan altid omdannes til rektangler med samme areal.

· Ikke-retvinklede trekanter er halvdelen af et parallelogram.

I løbet af 4.-6. klasse kan eleverne udvikle metoder, der bygger på erkendelse og indsigt, så de på et senere tidspunkt, hvor det lærte er glemt, vil kunne gendanne den viden, som engang blev erhvervet. I processen med denne størrelsesbeskrivelse er det afgørende, at eleverne selv udvikler et sprog, som fortæller om deres egne konklusioner. Ved at sætte elevernes forskellige sproglige udtryk op mod hinanden, gives der mulighed for at drøfte mere præcise formuleringer, som udelukker misforståelser.

For ældre elever, hvor konkretiseringen ofte tones lidt ned, er der fortsat et behov for at skabe indlevelse i de grundlæggende begreber. Det er vanskeligt at forestille sig, at eleverne kan udvikle et størrelsesbegreb knyttet til rumlige figurer uden at have været igennem fysiske målinger, som kan danne grundlag for beregninger – helt på samme måde som ved arbejdet med arealbegrebet.

Dynamiske geometriprogrammer og dynamiske virtuelle materialer

I dag findes en række dynamiske geometriprogrammer, som gratis kan hentes på internettet. En stor del af det traditionelle arbejde med at konstruere fx trekanter med givne egenskaber vil naturligt foregå på computeren. Ligesom lommeregner og computer har fjernet behovet for træning af standardalgoritmer i forbindelse med arbejdet med tal og algebra, ændrer anvendelsen af dynamiske geometriprogrammer i forbindelse med arbejdet med geometri også behovet for at udvikle tegnemetoder til geometriske konstruktioner på papir. Og samtidig åbnes der for mange nye muligheder for at udvide elevernes arbejde med geometrisk konstruktion, undersøgelser med henblik på forståelse af geometriske regler og ræsonnementer.

Arbejdet med dynamiske geometriprogrammer kræver ofte, at en række geometriske begreber er kendte. Med disse begreber på plads kan eleverne relativt nemt konstruere en trekants omskrevne cirkel ved at tegne en trekant, herefter tegne midtnormaler og endelig tegne cirklen med centrum i midtnormalernes skæringspunkt og med den givne radius. Herefter kan eleverne ved at trække i punkter og linjestykker undersøge, hvad der sker med midtnormalerne og den omskrevne cirkel, når trekanten ændrer form.

Det interessante er ikke, at computeren kan tegne. Det interessante er derimod, at eleverne får øgede muligheder for at arbejde med tegning, undersøgelser, analyser og ræsonnementer i tæt sammenhæng.

Også i forbindelse med arbejdet med geometriske mønstre rummer computeren store muligheder på alle klassetrin. I forbindelse med et sådant arbejde er det oplagt at gennemføre ræsonnementer omkring linjer ved trekanter, cirkler, vinkler, flytninger, symmetri osv.

Computeren rummer også særlige muligheder for at arbejde i et tilsyneladende tredimensionalt rum, og det kunne fx være oplagt at lade eleverne stifte bekendtskab med et program af den slags. I et sådant program kan man opgive mål for rumlige figurer og meget hurtigt sammensætte disse figurer og betragte dem fra forskellige vinkler som en perspektivtegning. En mulighed er at gå på jagt efter den type programmer på internettet, hvor der findes en stigende mængde af gratis virtuelle materialer, som eleverne kan manipulere med ligesom konkrete materialer. De virtuelle materialer begrænser sig ikke kun til geometri.

Læs mere på **Freudenthal Institut** og **Illuminations**.

4.4 Statistik og sandsynlighed

Arbejdet med statistik og sandsynlighed skal ses i en tæt sammenhæng. I starten af skoleforløbet arbejdes der med enkel deskriptiv statistik, samtidig med at eleverne gør sig grundlæggende erfaringer med chancebegrebet ud fra intuitive overvejelser og systematiske observationer af stokastiske eksperimenter, fx i forbindelse med spil. På mellemtrinnet skal eleverne gennemføre og præsentere statistiske undersøgelser samt analysere og tolke resultater af undersøgelser fra fx medierne og internettet. Sideløbende arbejdes der med statistiske undersøgelser af chanceeksperimenter ved simulering, og eleverne knytter beregning af frekvenser til sandsynlighedsbegrebet. I udskolingen arbejder eleverne videre med en mere kritisk stillingtagen til forskellige anvendelser af statistik både ved at gennemføre egne undersøgelser og ved at analysere og tolke præsentationer af resultater af statistiske undersøgelser. Det teoretiske (kombinatoriske) sandsynlighedsbegreb introduceres ud fra erfaringer med det statistiske sandsynlighedsbegreb samt overvejelser over udfaldsrum og tællemåder, og eleverne arbejder bl.a. med sammensatte sandsynligheder. I statistik anvendes overvejelser om sandsynligheder til at analysere og vurdere stikprøveundersøgelser.

Brudstykker af arbejdet med statistik

I de yngre klasser starter arbejdet med statistik omkring indsamling af data, der vedrører eleverne selv, fx alder, højde, skostørrelser, antal søskende, antal kæledyr og fritidsinteresser, og deres nærmeste omgivelser som skolevejens længde, boligtype mv.

I en 2. klasse interesserer eleverne sig fx for trafikken på skolevejen. Der tælles biler og andre trafikanter på forskellige tidspunkter. Datamaterialet optælles og bearbejdes i tabeller og enkle diagrammer, gerne med hjælp af en computer. I hverdagssprog formulerer eleverne, hvad man kan se af de bearbejdede data:

• Hvilke typer trafikanter er der flest af?

• Hvornår er der flest trafikanter på gaden?

• Er der forskel på, hvornår der er flest biler, og hvornår der er flest fodgængere?

• Hvorfor er det sådan?

Eleverne kan også bruge indsamlede data over en længere periode til at beskrive en udvikling, fx ved at de måler deres egen højde to gange årligt gennem flere år, ikke mindst de år, hvor de vokser ekstraordinært meget. Lignende dataindsamling kan indgå i tværfaglige forløb, fx egne idrætspræstationer over tid.

Eleverne skal også arbejde med at læse andres statistiske fremstillinger. I 6. klasse er eleverne fx blevet optaget af et diagram fra en avis, der beskriver 12-åriges medieforbrug. Selve forståelsen af diagrammet sammenlignet med avisartiklens beskrivelse af samme har medført diskussioner i klassen. Eleverne beslutter at gennemføre en undersøgelse af medieforbruget i alle skolens 6. klasser. De udarbejder et spørgeskema, som også medtager forhold, der ikke var med i avisens undersøgelse. De indsamlede data bearbejdes i et regneark. Fremlægning indebærer en sammenligning med avisens udlægning og sammenligninger mellem piger og drenge, klasserne indbyrdes osv.

I forbindelse med projektopgaven i 9. klasse gennemfører eleverne ofte spørgeskemaundersøgelser. Det er derfor oplagt i matematikundervisningen at give eleverne mulighed for at arbejde med udarbejdelsen af spørgsmål, vurdering af deres kvalitet og validitet, optællingsmetoder og bearbejdning i et regneark eller et statistikprogram. Udgangspunktet for at vurdere andre statistiske overvejelser vil ofte være avisernes og andre mediers anvendelse af statistik i form af tabeller og diagrammer.

Brudstykker af arbejdet med sandsynlighed

I arbejdet med sandsynlighed sigtes der på, at eleverne opnår indsigt i de forskellige måder, sandsynligheder beregnes på:

• Som personlige vurderinger, ofte eksperter. Dette er bl.a. grundlaget for beregninger af odds i Danske Spil.

• Som en frekvensanalyse af indsamlede data (statistisk sandsynlighed). Dette anvendes bl.a. i nogle risikovurderinger.

• Som udfald, der opfattes som ligevægtede. Dette anvendes fx i forbindelse med terningespil.

Et eksempel på en populær aktivitet i 2. klasse er dyreløb på baner nummereret 2–12. Hver bane skal gennemløbes af et dyr. På bane 2 løber fx geparden, på bane 5 koen, på bane 7 sneglen, på bane 11 elefanten osv. Eleverne spiller vinderspil med skolepenge. På skift slår eleverne med to terninger, og summen af øjnene bestemmer, på hvilken bane der rykkes et felt frem. Der kan spilles flere gange, dyrene kan skifte bane, dyrene kan skiftes ud med transportmidler af forskellig art. Legen følges op med en dialog om, hvorfor det ser ud til, at banerne 6, 7, eller 8 næsten altid vinder.

• Gad vide, hvilke terningekast der kan give 5, 12, 2?

• Hvad nu, hvis terningerne er to forskellige farver – ændrer det chancerne?

• Hvad nu, hvis I prøver igen – bliver det de samme dyr, der vinder?

• Hvordan går det, hvis I laver rigtig mange kast?

• Hvad nu, hvis det er differensen, der bestemmer banenummeret?

Forløbet kan på mellemtrinnet følges op med en egentlig undersøgelse af kast med to terninger med en efterfølgende statistisk bearbejdning.

• Hvis alle i klassen har slået 50 gange, hvilken sum er så hyppigst?

• Hvordan forholder det sig, hvis alle har slået 200 gange?

• Hvordan ser det ud, når vi har ladet fx et regneark simulere tusindvis af slag?

I overbygningen kan dyreløbet følges op med at opbygge en simpel matematisk model over spilchancerne vha. af enkle kombinatoriske beregninger ud fra en formodning om, at terningernes udfald opfattes som ligevægtede. Eleverne analyserer og udregner sandsynligheder for forskellige chancer for at vinde i dyreløbet.

Sandsynlighed anvendes imidlertid i mange andre sammenhænge ud over i forbindelse med spil. Det er vigtigt, at eleverne – specielt i den sidste del af skoleforløbet – stifter bekendtskab med disse anvendelsesmuligheder, som er væsentlige i mange forskellige sammenhænge i det omgivende samfund. Det kan fx være forsikringsspørgsmål, vejrprognoser, opinionsundersøgelser, risikovurderinger i forbindelse med brug af nye teknologier eller chancer for helbredelse i forhold til risiko for bivirkninger ved brug af medicin.

I undervisningen i de ældre klasser indgår således behandlingen af fænomener, der vedrører tilfældighed, chance eller risiko og usikkerhed i mange forskellige sammenhænge. Det kan fx dreje sig om:

• stikprøveundersøgelser

• lodtrækning

• forsikring

• vejrdata

• chancespil

• ekspertvurderinger

• odds.

Relaterede moduler

Kom godt i gang med arbejdet med læringsmål

It og medier - vejledning

Sproglig udvikling - vejledning

Innovation og entreprenørskab - vejledning

Relaterede links

Scratch
Visuelt programmeringssprog der kan bruges af børn ned til indskolingen til at skrive mindre programmer i (computer).

Hopscotch
Visuelt programmeringssprog der kan bruges af børn ned til indskolingen til at skrive mindre programmer i (Ipad).

Kode skolen
Inspiration til at komme i gang med at programmere med sine elever, fx i form af forskellige programmeringsspil af stigende sværhedsgrad, der skal fungere som forløber for mere fri programmering.

emu.dk
Danmarks læringsportal.

Freudental institut
Programmer med virtuelle muligheder.

Illuminations
Resources for Teaching Math.

Emneord

Vejledning,

Baggrundsoplysninger om siden